

X Physics Lib.

Cyf 1

SEP 16 1930

5. FOLGE, 1930, BAND 6, HEFT 3

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 398. Band

Kuratorium:

F. Paschen	M. Planck	R. Pohl
A. Sommerfeld	M. Wien	E. Warburg

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1930 erscheinen die Bände 4, 5 und 6 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 22. August 1930.

Inhalt

	Seite
Balth. van der Pol und K. F. Niessen-Eindhoven, Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über eine ebene Erde. (Mit 9 Figuren)	273
Hans Georg Baerwald-Berlin-Charlottenburg, Über die Fortpflanzung von Signalen in dispergierenden Systemen. Erster Teil: Allgemeine Grundlagen. Kontinuierliche Systeme ohne Verluste. (Mit 21 Figuren)	295
Carl Wagner-Jena, Über die thermodynamische Behandlung stationärer Zustände in nicht isothermen Systemen II. Berichtigung und Ergänzung. (Mit 1 Figur)	370
Walter Kohl-Dresden, Über die Beeinflussung der Kathodenstrahlreflexion an Aluminium und Platin durch Belichtung und die Realität der dabei auftretenden positiven und negativen Zusatzströme. (Mit 11 Figuren)	391

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.



ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1930, BAND 6, HEFT 3

Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über eine ebene Erde

Von Balth. van der Pol und K. F. Niessen

(Mit 9 Figuren)

Bekanntlich hat Sommerfeld¹⁾ für dieses Problem einen analytischen Ansatz entworfen, der zu einer Lösung für die Feldstärke führte, als Funktion vom Abstand, von der Wellenlänge und von der Dielektrizitätskonstante ϵ und dem elektrischen Leitvermögen σ der Luft und der Erde. Eine ausschlaggebende Rolle spielen dabei die Größen:

$$k_1^2 = \frac{\epsilon_1 n^2 + j n \sigma_1}{c^2}, \quad k_2^2 = \frac{\epsilon_2 n^2 + j n \sigma_2}{c^2},$$

wo der Index 1 sich auf das erste Medium (Luft) und der Index 2 sich auf das zweite Medium (Erde) bezieht ($j = \sqrt{-1}$).

Die magnetischen Permeabilitäten μ_1 und μ_2 haben wir sofort schon gleich 1 genommen.

Weiter stellt n die Winkelfrequenz dar und c die Lichtgeschwindigkeit.

Sommerfelds Lösung des allgemeinen Problems, wo ein Dipoloszillator im Koordinatenursprung gedacht ist, führt zu einer Potentialfunktion $\Pi(r, z)$ in Zylinderkoordinaten (r, z) , woraus die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes unmittelbar folgen. Für diese Potentialfunktion im ersten Medium findet Sommerfeld den strengen Ausdruck:

$$(1) \quad \frac{\Pi(r, z)}{k_1^2} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \lambda d\lambda}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}},$$

worin alle Wurzeln so definiert sind, daß der reelle Teil positiv wird.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 28. S. 665. 1909 und ebenda 81. S. 1135. 1926; vgl. auch: H. Weyl, Ann. d. Phys. 60. S. 481. 1919, Annalen der Physik. 5. Folge. 6.

Diese zwar mathematisch äußerst elegante Lösung enthält aber eine weniger leicht zu hantierende Besselfunktion im Integrand. Für den Fall $|k_2|^2 \gg |k_1|^2$ und k_1^2 reell und k_2^2 rein imaginär, gab Sommerfeld den Näherungsausdruck für $\beta = 0$:

$$(2) \quad \Pi(r) = \frac{e^{jk_1 r}}{r} \left[1 + j\sqrt{\pi} \varrho e^{-\varrho} - 2\sqrt{\varrho} e^{-\varrho} \int_0^{\sqrt{\varrho}} e^{v^2} dv \right],$$

wo die „numerische Distanz“ ϱ definiert ist durch

$$\varrho = j(k_1 - k) r \cong \frac{jk_1^2}{k_2^2} \frac{k_1 r}{2}$$

und

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}.$$

Wir möchten nun auch für den allgemeinen Fall eine strenge, vereinfachte Formel ableiten. Das gelingt auf operatorischem Wege unter Anwendung von Methoden von Heaviside, Carson und einem von uns.¹⁾

Man könnte dabei von Sommerfelds Formel (1) ausgehen und diese operatorisch vereinfachen. Wir zogen es aber vor, das ganze Problem von Anfang an operatorisch zu behandeln. Mit dieser Arbeit beabsichtigen wir deshalb ein zweifaches Ziel:

1. eine vereinfachte strenge Lösung anzugeben,
2. zu demonstrieren, wie leicht man in dieser Art Probleme mit neueren operatorischen Methoden ganz exakt und ungekünstelt zu einer Lösung kommen kann.

Als einen Sonderfall können wir auch Sommerfelds Näherung (2) aus unserer allgemeinen Lösung ableiten.

Die Potentialfunktionen Π_1 und Π_2 in den respektiven Media genügen den Wellengleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2} + k_1^2 \Pi_1 = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z^2} + k_2^2 \Pi_2 = 0 \end{cases}$$

1) John R. Carson, *Electric Circuit theory and the operational calculus* (Mc Graw-Hill, New York 1926); Balth. van der Pol, *Phil. Mag.* 7. S. 1153. 1929 und 8. S. 861. 1929. Nach letzterer Arbeit wird mit I verwiesen.

mit den Grenzbedingungen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1^2 \Pi_1 = k_2^2 \Pi_2, \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \end{array} \right\} \text{ für } z = 0$$

$$(5) \quad \Pi_1 \rightarrow \frac{e^{j k_1 R}}{R} \text{ für } R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0.$$

Von den Differentialgleichungen (3) suchen wir eine Lösung von solcher Form, daß die Berücksichtigung der Grenzbedingungen bei $z = 0$ leicht gestattet. Auch soll Π_1 für $z = +\infty$ verschwinden, ebenso wie Π_2 für $z = -\infty$.

Deshalb versuchen wir den Ansatz:

$$(6) \quad \Pi_1 = \sum_{(2)} c(l) e^{(\mp) l z} \pi_l(r),$$

wo über den positiven Parameter l in irgendeiner Weise mittels Koeffizienten $c(l)$ summiert wird.

Es handelt sich also um partikuläre Lösungen von (3) in der Gestalt:

$$\Pi = e^{\mp l z} \pi_l(r),$$

wo für $\pi_l(r)$ dann gilt:

$$(7) \quad r \frac{d^2 \pi_l}{dr^2} + \frac{d \pi_l}{dr} + r(k^2 + l^2) \pi_l = 0.$$

Wir werden jetzt $\pi_l(r)$ operatorisch abbilden und haben dazu¹⁾ $p X(p)$ zu bestimmen, wo die Funktion $X(p)$ eines positiven reellen Parameters p definiert ist durch

$$X(p) = \int_0^\infty e^{-pr} \pi_l(r) dr.$$

Die in I beschriebene Methode liefert sofort aus (7) eine Differentialgleichung für $X(p)$. Man hat nur (7) mit e^{-pr} zu multiplizieren und zwischen 0 und ∞ nach r zu integrieren — oder einfacher Tab. 28, S. 877, I anzuwenden —, wobei die Differentialgleichung (7) transformiert wird in:

$$(p^2 + k^2 + l^2) \frac{dX(p)}{dp} + p X(p) = 0,$$

woraus

$$(8) \quad p X(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + k^2 + l^2}} f(l) \div \pi_l(r),$$

1) John R. Carson, a. a. O.

wo $f(l)$ eine beliebige Funktion des beliebigen Parameters l darstellt.

Weiter bedeutet das Zeichen \doteq in (8), daß $pX(p)$ die operatorische Abbildung von $\pi_i(r)$ ist.

Für die Erdoberfläche ($\mathfrak{z} = 0$) haben wir nur zu betrachten:

$$(9) \quad \Pi_1(r, \mathfrak{z} = 0) = \Pi(r) = \sum_l c(l) \pi_l(r).^1)$$

Nach den Grenzbedingungen wird für $r \rightarrow 0$

$$\Pi(r) \rightarrow \frac{e^{jk_1 r}}{r}.$$

Da nun diese Funktion sich nicht operatorisch abbilden läßt
 $\left(p \int_0^\infty e^{-pr} \frac{e^{jk_1 r}}{r} dr \right.$ würde ja unendlich werden)
 betrachten wir lieber $r \Pi(r)$.

Es folgt aus I, Formel (12), daß, wenn

$$pX(p) \doteq \pi_i(r),$$

wir sofort schreiben können:

$$-p \frac{dX(p)}{dp} \doteq r \pi_i(r),$$

so daß

$$r \pi_i(r) \doteq f(l) \left(-p \frac{d}{dp} \right) \frac{1}{\sqrt{p^2 + k^2 + l^2}} = f(l) \frac{p^2}{(p^2 + k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese hat man nach (9) und (10) über l zu summieren, um die Abbildung von $r \Pi(r)$ zu bekommen.

Wir brauchen für den allgemeinen Ansatz statt $\Pi(r, \mathfrak{z})$ nun auch

$$(10) \quad \Psi(r, \mathfrak{z}) = r \Pi(r, \mathfrak{z}),$$

deren operatorische Abbildung nach Obigem in der Form

$$(11) \quad \Psi_{1,2}(r, \mathfrak{z}) \doteq \int_{a_{1,2}}^{b_{1,2}} \frac{p^2}{(p^2 + k_{1,2}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} e^{(\mp) l \mathfrak{z}} f_{1,2}(l) dl$$

1) Verwechslung der hier eingeführten $\Pi(r) = \Pi_1(r, 0)$ mit $\Pi(r, \mathfrak{z})$ als zusammenfassendem Symbol für $\Pi_1(r, \mathfrak{z})$ und $\Pi_2(r, \mathfrak{z})$ wird wohl nicht zu befürchten sein, wiewohl dasselbe Funktionszeichen benutzt wurde.

geschrieben werden kann, wo die Summation durch eine Integration zwischen beliebigen reellen positiven Werten a_1, a_2 und b_1, b_2 ersetzt wurde.

Der Dipolbedingung (5) zu Willen, zerlegen wir mit Sommerfeld:

$$\Psi_1(r, z) = \frac{r e^{j k_1 R}}{R} + \Psi_{1s}(r, z),$$

$$\Psi_2(r, z) = \Psi_{2s}(r, z),$$

wo die eingeführten sekundären Ψ_s den in Ψ transformierten Differentialgleichungen (3) zu genügen haben und deshalb mittels Funktionen von der Form (11) abgebildet werden können.

Weiter lauten die Grenzbedingungen (4) in Ψ :

$$(12) \quad \begin{cases} k_1^2 [e^{j k_1 r} + \Psi_{1s}(r, z=0)] = k_2^2 \Psi_{2s}(r, z=0), \\ \frac{\partial \Psi_{1s}}{\partial z}(r, z=0) = \frac{\partial \Psi_{2s}}{\partial z}(r, z=0). \end{cases}$$

Dank den gefundenen Bildern:

$$(13) \quad \Psi_{1s} \div \int_{a_{1,2}}^{b_{1,2}} \frac{p^2}{(p^2 + k_{1,2}^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\mp l z} f_{1,2}(l) dl$$

und dem leicht zu verifizierenden Bilde:

$$(14) \quad e^{j k_1 r} \div \frac{p}{p - j k_1} = p^2 \int_{-j k_1}^{\infty} \frac{dl}{(p^2 + k_1^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

können die Grenzbedingungen (12) auch operatorisch einfach transformiert werden.

Die in (14) auftretenden Grenzen geben eine Hinweisung für die Wahl der Grenzen a_1, a_2, b_1, b_2 in (13).

Jedoch sollte man zuerst mittels Substitutionen:

$$k_1^2 + l^2 = \lambda^2, \quad \text{eventuell } k_2^2 + l^2 = \lambda^2$$

alle Bilder mit einem und demselben Nenner versehen, wonach sich für die gemeinschaftlichen Grenzen für λ von selbst 0 und ∞ darbieten.

Die Grenzbedingungen werden dabei dann transformiert in:

$$\begin{aligned} p^2 k_1^2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} + f_1(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}) \right) d\lambda \\ = p^2 k_2^2 \int_0^\infty \frac{f_2(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \lambda d\lambda}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ - p^2 \int_0^\infty \frac{f_1(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2})}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda d\lambda = p^2 \int_0^\infty \frac{f_2(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \lambda d\lambda}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgen sofort Relationen für die Integrande, so daß den Grenzbedingungen bei folgender Wahl genügt wird:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}) &= -\frac{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{N}, \\ f_2(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) &= \frac{k_2^2}{N}, \end{aligned} \right\} \text{ mit } N = k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}.$$

An dieser Stelle war der Gedankengang wesentlich dem in Sommerfelds Arbeit parallel, aber von hier ab werden wir anderen Wegen folgen.

Nach Substitution der gefundenen Funktionen ergibt sich:

$$\Psi_1(r, \delta) = r \Pi_1(r, \delta) \doteq \int_0^\infty \frac{p^2 \lambda d\lambda}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{k_2^2}{N} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \delta}.$$

Von hier aus würde man nach einer rückwärtigen Interpretation (d. h. von p nach r) zu Sommerfelds Formel (1) gelangen können.¹⁾ Wie gesagt, brauchen wir aber diesen Umweg nicht

1) Es gilt nämlich [vgl. z. B. John R. Carson, a. a. O. (1) S. 40 oder I (40)]:

$$\frac{p}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \doteq J_0(\lambda r)$$

und weiter nach I (11):

$$-p \frac{d}{dp} \frac{1}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \doteq r J_0(\lambda r),$$

Woraus

$$r \Pi_1(r, \delta) = \int_0^\infty \frac{k_2^2 \lambda d\lambda J_0(\lambda r)}{N} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \delta}.$$

zu machen, und schreiben, uns sofort auf den Fall $\lambda = 0$ beschränkend:

$$\frac{r H(r)}{k_2^2} \div \int_0^{\infty} \frac{p^2}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\lambda d\lambda}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}.$$

Um die $\frac{3}{2}$ -Potenz zu vertreiben, setzen wir:

$$p^2 + \lambda^2 = \frac{p^2}{x},$$

so daß

$$\frac{r H(r)}{\beta} \div \int_0^1 \frac{dx}{\alpha \sqrt{1 - (1 + \beta)x + \beta} \sqrt{1 - (1 + \alpha)x}}$$

mit

$$(15) \quad \alpha = \frac{k_1^2}{p^2}, \quad \beta = \frac{k_2^2}{p^2}.^1)$$

Vertreiben wir noch auf die übliche Weise die Wurzeln aus dem Nenner und substituieren dann in den zwei entstandenen Integralen bzw.

$$1 - (1 + \beta)x = \beta^2 v,$$

$$1 - (1 + \alpha)x = \alpha^2 u,$$

so ergibt sich die in α und β symmetrische Form:

$$(16) \quad \frac{2r H(r)}{\beta} \div \int_{-\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\alpha \sqrt{\beta^2 v}}{(\alpha - \beta)(\gamma v + 1)} dv + \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha^2}} \frac{\beta \sqrt{\alpha^2 u}}{(\beta - \alpha)(\gamma u + 1)} du$$

mit der Abkürzung

$$\gamma = \alpha + \beta + \alpha\beta.$$

Da der ursprüngliche λ -Weg gerade war (von 0 bis ∞ entlang der reellen Achse) folgt leicht aus den eingeführten Substitutionen, daß die Integrationswege in den letzteren Integralen

1) Eigentlich sollte $1/\beta$ im linken Glied als β im rechten Glied geschrieben werden (wie sich auch aus der vorigen Gleichung ergibt), denn die p -enthaltenden Faktoren, die ihrem Wesen nach nur im rechten Glied entstehen können, dürfen wegen ihres operatorischen Charakters nicht durch Multiplikation in das andere Glied gebracht werden. Wir erlauben uns aber für einen Augenblick die Schreibweise $r H(r)/\beta$ im linken Glied um das rechte auf eine symmetrische Form bringen zu können. Übrigens in (17) werden alle p -Faktoren wiederum ins rechte Glied gebracht.

auch gerade Linien sind. Deshalb durchlaufen $\alpha^2 u$ und $\beta^2 v$ die in Fig. 1 angegebenen Graden.

Da wir die Wurzel aus einer komplexen Größe $z = \rho e^{j\varphi}$ des ersten oder zweiten Quadranten nach der Vorschrift:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{j\frac{\varphi}{2}}, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

ziehen werden, dagegen die aus einer komplexen Größe $z = \rho e^{-j\psi}$ des vierten oder dritten Quadranten nach der Vorschrift:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{-j\frac{\psi}{2}}, \quad 0 < \psi < \pi,$$

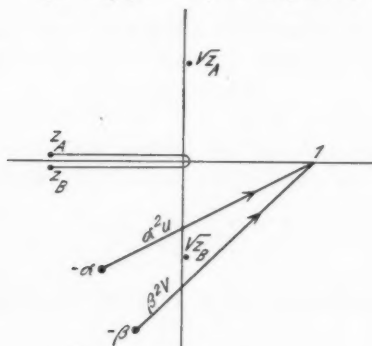


Fig. 1

ist die negative reelle Achse in Fig. 1 ein Verzweigungsschnitt (vgl. $\sqrt{z_A}$ und $\sqrt{z_B}$).

Bei der Wahl des Zeichens in $e^{\mp i\frac{\varphi}{2}}$ in $\psi_{1,2}(r, \delta)$ gehört die Forderung, daß $\sqrt{\alpha^2 u}$ und $\sqrt{\beta^2 v}$ immer positive reelle Teile haben werden, woran Fig. 1 und die gegebene Vorschrift auch genügen. Wir zeichnen nun in Fig. 2 die Wege für die Größen u und v selber und stricheln die Wege, insofern sie in der zweiten Riemannebene verlaufen. Die u - und v -Wege werden vom Schnittpunkte S in zwei Stücke zerlegt und wenn wir diese paarweise miteinander vereinigen, können wir, in der Voraussetzung, daß sich kein Pol des Integrands in den schraffierten Dreiecken befindet¹⁾, das ganze rechte Glied von (16) auffassen als eine Summe zweier Integrale entlang der

1) In Anhang A wird bewiesen, daß diese Dreiecke wirklich polenfrei sind.

doppeltgepfeilten Wege. Man wird von selbst zu dieser Um-
bildung geführt durch den Wunsch, die (nach [15] in α und
 β verborgene) Größe p in der oberen und in der unteren
Grenze eines Integrals in derselben Potenz zu bekommen,
damit sie hieraus später desto leichter fortzuschaffen ist.

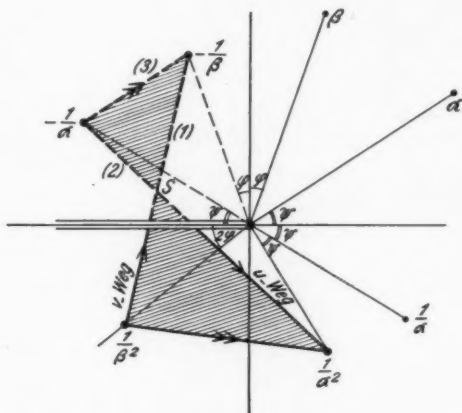


Fig. 2

Nennen wir die komplexen Variablen entlang der neuen
Wege z und ζ , so entsteht:

$$\frac{2r \Pi(r)}{\beta} \div \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} \left[\int_{\frac{1}{\beta^2}}^{\frac{1}{\alpha^2}} \frac{\sqrt{z} dz}{\gamma z + 1} + \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{-\frac{1}{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} d\zeta}{\gamma \zeta + 1} \right].$$

Um die (nachher zurückzuinterpretierende) Größe p aus
den Grenzen zu vertreiben, setzen wir

$$z = p^4 t, \quad \zeta = p^2 \tau,$$

und schreiben die dann entstehenden Integrale in die
Form:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{H(r)}{k_2^2} = \frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \left[\int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{p^2 \sqrt{dt}}{(k_1^2 + k_2^2) t \left[p^2 + \frac{k_1^2 k_2^2 t + 1}{(k_1^2 + k_2^2) t} \right]} \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\frac{1}{k_1^2}}^{-\frac{1}{k_2^2}} \frac{p \sqrt{\tau} d\tau}{\{(k_1^2 + k_2^2) \tau + 1\} \left[p^2 + \frac{k_1^2 k_2^2 \tau}{(k_1^2 + k_2^2) \tau + 1} \right]} \right], \end{aligned} \right.$$

weil wir einen Ausdruck in Form $\frac{p^2}{p^2 + C}$ oder $\frac{p}{p^2 + C}$ leicht in eine Funktion von r zurücktransformieren können.

Aus demselben Grunde schreiben wir nun:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{k_1^2 k_2^2 t + 1}{(k_1^2 + k_2^2) t} = s^2, \\ \frac{k_1^2 k_2^2 \tau}{(k_1^2 + k_2^2) \tau + 1} = \sigma^2. \end{cases}$$

Die t - und τ -Wege sind wiederum, ebenso wie die z - und ζ -Wege, gerade Linien zwischen den entsprechenden Grenzen. Daraus folgt nach Anhang B, daß die Wege, welche von s^2 und σ^2 durchlaufen werden, über ihre ganze Länge zusammenfallen. Beide geben den in Fig. 3 gezeichneten Kreisbogen durch k_1^2 und k_2^2 , dessen komplementärer Bogen durch den Punkt

$$(19) \quad h^2 = \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$$

geht. Daraus folgt, daß das Argument von h^2 immer zwischen denjenigen von k_1^2 und k_2^2 liegt (vgl. übrigens die Konstruktion von h^2 in Fig. 3).

Im Anhang B wird weiter noch gezeigt, daß h^2 immer links von der Gerade (k_1^2, k_2^2) liegt, oder auf dieser gelegen ist. (Letzterer Fall bei reellem k_1^2 und rein imaginärem k_2^2 oder umgekehrt.) Einführung der Integrationsvariablen s und σ gibt nun in (17) zwei Integrale, die wegen der Identität der Integrationswege (wiewohl die Durchgangsrichtung verschieden ist) zu einem einzigen zusammengefaßt werden können, nämlich:

$$\frac{H(r)}{k_2^2} = \frac{2 k_1^2 k_2^2}{(k_2^4 - k_1^4)(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}} \int_{s=k_2}^{s=k_1} \frac{p}{p - j s} d \cdot \frac{1}{(s^2 - h^2)^{1/2}}.$$

Der Integrationsweg von s korrespondiert mit dem in Fig. 3 gezeichneten Weg für s^2 und läuft also von k_1 bis k_2 teilweise unter-, teilweise oberhalb der reellen Achse, welche Teile jedoch auf gewöhnlicher Weise zusammenhängen, da sie den Verzweigungsschnitt unberührt lassen.

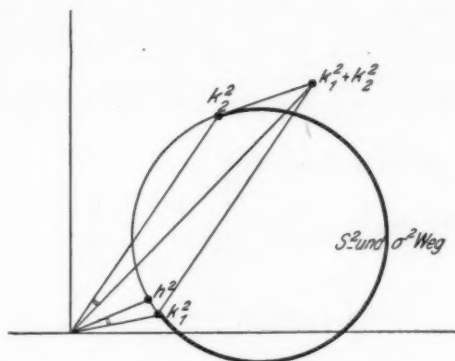


Fig. 3

In einem Punkte s oberhalb der reellen Achse können wir leicht nach der allgemeinen Vorschrift

$$p \int_0^{\infty} e^{-pr} H(r) dr \doteq H(r)$$

zurücktransformieren:

$$(20) \quad \frac{p}{p - js} \doteq e^{jrs}.$$

Das rechte Glied bei $r = \infty$ wird durch den positiven imaginären Teil von s zum Verschwinden gebracht. Deshalb wollen wir den s -Weg von k_1 bis k_2 zuerst so umbilden, daß er ganz oberhalb der reellen Achse zu liegen kommt. Dabei dürfen die singulären Punkte des Integrands, nämlich:

$$s = \pm h, \quad s = -jp$$

nicht passiert werden.

Wir haben nur den Punkt $s = +h$ zu beachten, da es für die beiden anderen sofort deutlich ist, daß sie kein Hindernis bilden.

Im Anhang B wird gezeigt, daß h immer links von der Geraden (k_1, k_2) liegt, auch selbst, wenn h^2 im extremen Falle auf der Geraden (k_1^2, k_2^2) liegen möchte.

Deshalb können wir den s -Weg als eine Gerade von k_1 nach k_2 laufen lassen und können dann überdies in jedem seiner Punkte die Interpretierung (20) anwenden, woraus nun unsere definitive in k_1^2 und k_2^2 symmetrische Lösung entsteht:

$$\frac{H(r)}{k_2^2} = \frac{k_1^2 k_2^2}{(k_1^4 - k_1^2)(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}} \frac{1}{r} \int_{k_2}^{k_1} e^{jrs} ds \cdot \frac{1}{(s^2 - h^2)^{1/2}};$$

oder nach partieller Integration:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} H(r) &= \frac{h^2}{k_1 k_2} \frac{k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \left[\frac{k_2}{k_1} \frac{e^{jk_1 r}}{r} - \frac{k_1}{k_2} \frac{e^{jk_2 r}}{r} \right. \\ &\quad \left. + jh \int_{k_1}^{k_2} \frac{e^{jrs}}{\sqrt{s^2 - h^2}} ds \right]. \end{aligned} \right.$$

Nach unserer Ableitung gilt diese Formel für alle komplexen Werte von k_1^2 und k_2^2 , wenn nur im ersten Quadrant gelegen, wie das auch physikalisch der Fall sein muß. Diese ist unsere allgemeine Formel, von welcher wir durch das Fehlen von Besselfunktionen im Integrand praktischen Nutzen erwarten. Im Anhang C wird gezeigt, wie diese Formel für $|k_2^2| \gg |k_1^2|$ und $\varepsilon_2 = \sigma_1 = 0$ in Sommerfelds ρ -Formel (2) übergeht¹⁾, und im Anhang D wird der erste Korrektions-term für diese Formel angegeben.

1) Durch die Substitution

$$s^2 = \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} (1 - b^2)$$

läßt unsere Formel (21) sich bis auf einen Faktor $\frac{k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)}$ in eine Formel überführen, die vor kurzem von L. H. Thomas (Phil. Soc. Cambridge 1930) auf ganz andere Weise abgeleitet worden ist. Thomas bekam diesen Faktor nicht, weil er eine Formel aus Sommerfelds erster Arbeit benutzte, während wir von den Grenzbedingungen aus Sommerfelds zweiter Arbeit ausgegangen sind. Deshalb bekommen wir auch für $k_1^2 = k_2^2$

$$H(r) = e^{jk_1 r} : 2r,$$

was auch physikalisch zu fordern ist.

Anhang A

Zweck: Zu beweisen, daß der Pol $z = -\frac{1}{\gamma}$ im Integrand von (16) nicht in die schraffierten Dreiecke der Fig. 2 fällt.

Da γ ein Punkt des ersten Quadranten ist, liegt $-\frac{1}{\gamma}$ sicher im zweiten Quadrant. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß $-\frac{1}{\gamma}$ niemals in dem schraffierten Teil *oberhalb* der reellen Achse liegen kann. Wir wollen aber sofort bemerken, daß dieser Teil wohl eine ganz andere Form haben kann wie in Fig. 2. Bei geeigneter Wahl von α und β ,

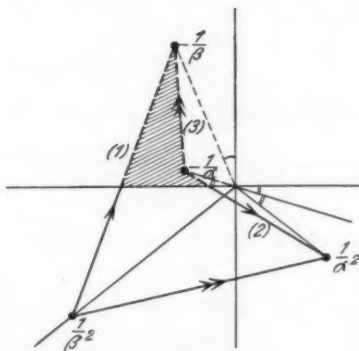


Fig. 4

d. h. nach (15) von k_1^2 und k_2^2 , würde z. B. auch eine Figur wie Fig. 4 entstehen können. Wir werden nun nacheinander zeigen, daß der Punkt $-\frac{1}{\gamma}$ in Figg. 2 und 4 immer rechts von der Geraden (1) fällt von $+\frac{1}{\beta^2}$ bis $-\frac{1}{\beta}$ (A) und rechts von der Geraden (2) von $+\frac{1}{\alpha^2}$ bis $-\frac{1}{\alpha}$ (B) und *nimmer* auf der Gerade (3) zwischen $-\frac{1}{\alpha}$ und $-\frac{1}{\beta}$ (C). Weiter werden wir zeigen, daß sich leicht ein Fall angeben läßt, wo der Punkt $-\frac{1}{\gamma}$ sicher rechts von (3) liegt (D).

Sobald diese Sätze (A) bis (D) bewiesen sind, ist der verlangte Beweis geliefert.

Wenn nämlich bei einer bestimmten Wahl von α und β der Pol $-\frac{1}{\gamma}$ im schraffierten Gebiet lag, so könnten wir durch Änderung von α

und β zu den Werten im Falle (D) den Pol außerhalb des schraffierten Gebietes bringen. Dann hätte der Pol, der nach (A) und (B) schon immer rechts von (1) und (2) lag, die Gerade (3) zu überschreiten, was nach (C) aber unmöglich wäre.

Deshalb kann der Pol nicht im fraglichen Gebiet liegen. Wenden wir uns nun zum Beweise von (A) bis (D).

Zum Beweise von (A) invertieren wir die Linie (1) von 0 aus, wodurch sie in einen Kreis durch 0, $-\beta$ und β^2 übergeht und spiegeln diesen in der horizontalen Achse, wonach Fig. 5 entsteht.

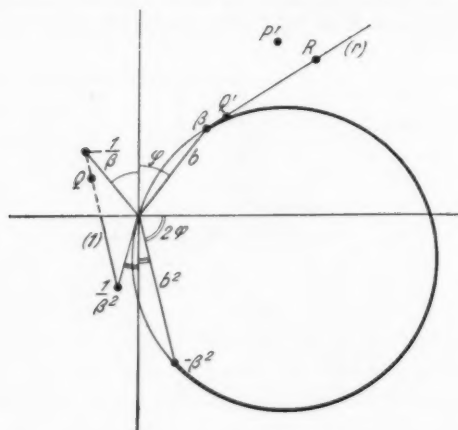


Fig. 5

Weil die Sehnen $(0, \beta)$ und $(0, -\beta^2)$ einen Winkel

$$\frac{\pi}{2} + \varphi < \pi$$

einschließen, liegt der Mittelpunkt immer rechts von der imaginären Achse.

Ein Punkt Q auf der Strecke (1) in Fig. 5 ist darzustellen durch:

$$z_Q = -\frac{1}{\beta} + \delta \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \right), \quad (0 < \delta < 1).$$

Kleiner δ -Wert entspricht dabei einem Punkte Q , dem Punkte $-\frac{1}{\beta}$ benachbart. Der Kleinheit von δ zufolge können wir auch schreiben:

$$z_Q = -\frac{1}{\beta} \left(1 - \delta \frac{1 + \beta}{\beta} \right) \cong -\frac{1}{\beta + \delta(1 + \beta)}.$$

Für das Bild Q' erhalten wir also:

$$z_{Q'} = \beta + \delta(1 + \beta).$$

Das Linienelement $\beta Q'$ der Tangente in β wird also dargestellt durch:

$$\delta(1 + \beta).$$

Jeder Punkt R , wofür

$$z_R = \beta + M(1 + \beta),$$

wo M nun eine *beliebig* große positive reelle Größe darstellt, befindet sich auf der Tangente (r) in β und zwar in der Richtung $\beta Q'$. Nun wird der Pol P :

$$z_P = -\frac{1}{\gamma}$$

transformiert in einem Punkt P' mit:

$$z_{P'} = \gamma = \alpha + \beta + \alpha\beta = \beta + \alpha(1 + \beta).$$

Im allgemeinen ist α komplex:

$$\alpha = M_\alpha e^{i\alpha_{\text{arg}}}$$

wo M_α und α_{arg} , respektive Modulus und Argument von α bedeuten; also:

$$z_{P'} = \beta + M_\alpha(1 + \beta)e^{i\alpha_{\text{arg}}}.$$

Nach dem Vorhergehenden würde der Punkt

$$z = \beta + M_\alpha(1 + \beta)$$

auf der Tangente (r) liegen (rechts von β , z. B. in R). Wegen

$$0 < \alpha_{\text{arg}} < \frac{\pi}{2}$$

liegt P' also *oberhalb* (r) und so daß $\angle P' \beta R = \alpha_{\text{arg}}$ und P' deshalb sicher außerhalb des Kreises in Fig. 5 liegt.

Da nun alle Punkte außerhalb des Kreises mit Punkten rechts von (1) übereinstimmen, befindet der Pol P sich offenbar rechts von (1).

In analoger Weise zeigt man die Richtigkeit des Satzes (B).

Der Beweis von (C) fordert einen anderen Gedankengang.

Zuerst invertieren und spiegeln wir die Linie (3) auf derselben Weise wie soeben die Gerade (1). Könnte der Pol $-\frac{1}{\gamma}$ nun auf der Strecke (3) liegen, so würde sein Bild P' , d. h. γ , auf den Kreisbogen in Fig. 6 fallen, z. B. in K . Dann würde der Vektor V , der nach

$$z_{P'} = \gamma = \alpha + \beta + \alpha\beta$$

eigentlich $\alpha\beta$ ist, ein Argument größer als π haben, was nach

$$0 \leq \left\{ \begin{matrix} \alpha_{\text{arg}} \\ \beta_{\text{arg}} \end{matrix} \right\} \leq \frac{\pi}{2}$$

unmöglich ist. Der Pol kann also niemals auf die Strecke (3) fallen.

Schließlich wählen wir für die Behauptung (D) den Fall reeller k_1^2 und rein imaginärer k_2^2 .

Hier geht sofort aus Fig. 7 hervor, daß γ sich außerhalb des Kreises befindet und der Pol auch rechts von (3) in Fig. 4. Da der Pol nach (A) und (B) schon rechts von (1) und (2) liegt, fällt er immer außerhalb des schraffierten Gebietes.

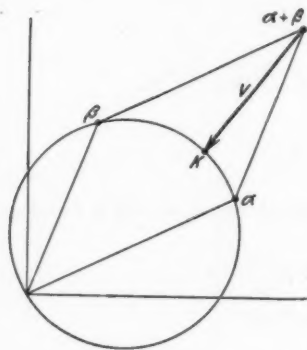


Fig. 6

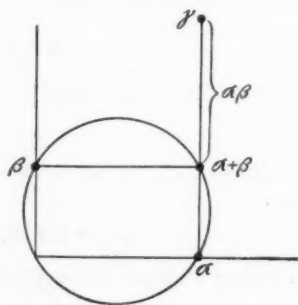


Fig. 7

Aus diesen vier Hilfssätzen folgt, wie wir schon im Anfang bemerkten, sofort der Schluß, daß das zu untersuchende (schraffierte) Gebiet polenfrei sei.

Anhang B

Zweck: Gezeigt wird, daß die Wege für s^2 und σ^2 in (18) identisch sind und daß der Punkt $z = h$ links von der Geraden (k_1, k_2) liegt.

Nach ihrer Definition können wir auch schreiben:

$$s^2 = h^2 + \frac{1}{N_t}, \quad \sigma^2 = h^2 + \frac{1}{N_r}$$

mit

$$N_t = (k_1^2 + k_2^2) t, \quad N_r = - \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{h^3} \right) \tau - \frac{1}{h^3}.$$

Wenn t und τ zwischen ihren Grenzen gehen, beschreiben N_t und N_τ die Gerade zwischen den Punkten:

$$\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^4} \quad \text{und} \quad \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2^4},$$

wiewohl in umgekehrter Richtung.

Der Unterschied im Argument dieser Punkte beträgt:

$$2 \cdot \text{Argument von } \frac{k_2^2}{k_1^2}, \text{ also } \leq \pi.$$

Deshalb geht die Gerade dem Nullpunkt rechts vorbei oder genau durch den Nullpunkt, nur im Falle reeller k_1^2 und rein imaginärer k_2^2 (oder umgekehrt, aus Symmetrie-Überlegungen).

Nach der Inversionstheorie beschreiben $1/N_t$ und $1/N_\tau$ also denselben Kreisbogen, deren komplementärer Bogen durch den Nullpunkt geht.

Bei einer Verschiebung nach rechts über den Abstand h^2 entsteht dann die Fig. 3, wo also h^2 entweder links von, oder (im extremen Falle) auf der Geraden (k_1^2, k_2^2) liegt. Hieraus folgt für jeden Fall (auch im extremen), daß h immer links von der Geraden von (k_1, k_2) liegt, weil bekanntlich eine Gerade durch die Transformation $\zeta = \sqrt{z}$ in der komplexen Ebene in einen Hyperbol übergeht, der für unseren Fall in Fig. 8 abgebildet wurde, so daß aus Punkten z_1 und z_2 die links von der Geraden (k_1, k_2) fallenden Punkte $\sqrt{z_1}$ und $\sqrt{z_2}$ entstehen.

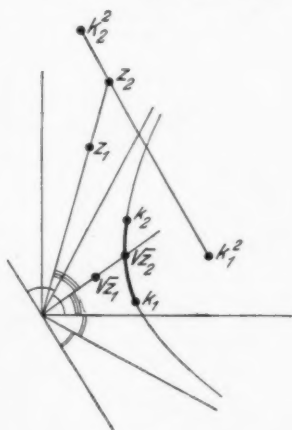


Fig. 8

Anhang C

Ableitung von Sommerfelds Formel (2) aus unserem allgemeinen Ausdruck.

Dazu setzen wir mit Sommerfeld den Sonderfall voraus:

k_1^2 reell, k_2^2 rein imaginär und

$$|k_2^2| \gg |k_1^2|.$$

In Formel (21) substituieren wir

$$s = h + t$$

und betrachten vorläufig nur das Integral:

$$(22) \quad K = \int_{k_1}^{k_2} \frac{e^{jrs}}{\sqrt{s^2 - h^2}} ds$$

$$(23) \quad = e^{jk_1 r} \cdot e^{-jr(k_1 - h)} \int_{k_1 - h}^{k_2 - h} \frac{e^{jrt}}{\sqrt{t(t + 2h)}} dt.$$

Wir definieren als erste, bzw. zweite numerische Distanz ϱ_1 und ϱ_2

$$\begin{cases} \varrho_1 = (k_1 - h)jr, \\ \varrho_2 = (k_2 - h)jr, \end{cases}$$

wovon ϱ_1 mit der Sommerfeldschen numerischen Distanz q identisch ist.

Setzen wir nun in (23)

$$jrt = w^2,$$

so läßt K sich schreiben in der symmetrischen Form

$$(23a) \quad K = 2e^{jk_1 r} e^{-\varrho_1} \int_{\sqrt{\varrho_1}}^{\sqrt{\varrho_2}} \frac{e^{w^2} dw}{\sqrt{w^2 + 2hj r}}.$$

Die singulären Punkte des Integrands sind:

$$w = \pm \sqrt{-2jh r}.$$

Der w -Weg ist der Bogen des orthogonalen Hyperbols, der von einem Punkte \sqrt{z} beschrieben wird, wenn z sich auf einer Geraden von

$$jr(k_1 - h) \text{ und } jr(k_2 - h)$$

bewegt.

Aus der Formel (19) für h^2 folgt:

$$|k_2^2| > |h^2| > |k_1^2|,$$

und

$$|k_2| > |h| > |k_1|.$$

Weiter geht aus der Konstruktion von h^2 hervor, daß:

$$\text{Arg. } k_1^2 < \text{Arg. } h^2 < \text{Arg. } k_2^2,$$

$$0 < \text{Arg. } h < \frac{\pi}{4}.$$

Demnach liegen die Punkte

$k_1 - h$ und $k_2 - h$ im vierten bzw. ersten Quadranten

und

$j(k_1 - h)r = \varrho_1$ und $j(k_2 - h)r = \varrho_2$ im ersten bzw. zweiten Quadranten.

Der w -Weg (d. h. der Hyperbelbogen zwischen $\sqrt{\varrho_1}$ und $\sqrt{\varrho_2}$ liegt also ganz im ersten Quadranten (vgl. Fig. 9).

Da h im ersten Quadranten liegt, liegen die singulären Punkte

$$w = \pm \sqrt{-2jkr}$$

im vierten und zweiten. Wir brauchen uns um diese also nicht zu kümmern bei der Ausbildung des w -Weges zu den beiden strichpunktierten Geraden, die von $\sqrt{q_1}$ nach 0 und von 0 nach $\sqrt{q_2}$ gehen. Die zweite Gerade kann im Grenzfall, für große $|k_2^2|$ wohl über $\sqrt{q_2}$ hinaus nach unendlich durchgezogen werden, da der Beitrag der hinzugefügten Strecke wegen der e -Potenz doch vernachlässigbar klein ist. Weiter können wir

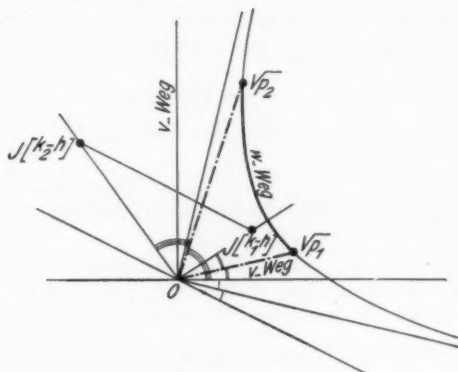


Fig. 9

diesen vom Nullpunkt über $\sqrt{q_2}$ nach unendlich gehenden Weg ebenso vom Nullpunkt entlang der positiv imaginären Achse legen, weil der erste Quadrant doch polenfrei ist, wie wir sahen.

Es ergibt sich also:

$$K = \frac{2e^{jk_1 r} e^{-\varepsilon_1}}{\sqrt{2} h j r} \left[\int_{V_0}^0 \frac{e^{v^2} dv}{\sqrt{v^2 + 2 h j r}} + \int_0^{\infty} \frac{e^{v^2} dv}{\sqrt{v^2 + 2 h j r}} \right].$$

Für $|k_2|^2 \gg |k_1|^2$ geht h in k_1 über und nach der Definition wird deshalb $q_1 \ll 2hjr$.¹⁾ Im ersten Integral bekommt v^3 also nur Werte welche klein sind in bezug auf $2hjr$. Im zweiten Integral hat v^3 immer einen negativen reellen Teil, der den Integrand rasch zum Verschwinden bringt. Deshalb können wir in beiden Integralen v^3 im Nenner fortlassen, so daß annähernd gilt:

$$K = \frac{2 e^{j k_1 r} e^{-a_1}}{\sqrt{2 h j r}} \left[\int_{\sqrt{a_1}}^0 e^{v^2} dv + \int_0^{j\infty} e^{v^2} dv \right].$$

1) Vergleiche den Näherungswert für ϱ auf S. 274.

Setzen wir diese K -Formel (vgl. auch (22)) in unseren allgemeinen Ausdruck (21) ein, wo die anderen Faktoren und Terme sich noch wegen $|k_2^2| \gg |k_1^2|$ vereinfachen lassen, so bekommen wir mit Hilfe von

$$\int_0^j e^{v^2} dv = \frac{j}{2} \sqrt{\pi},$$

$$(24) \quad H(r) = \frac{e^{j k_1 r}}{r} \left[1 + j \sqrt{q_1 \pi} e^{-q_1} - 2 \sqrt{q_1} e^{-q_1} \int_0^{\sqrt{q_1}} e^{v^2} dv \right].$$

genau den Ausdruck (2), da q_1 mit Sommerfelds q identisch war.

Es möge weiter noch folgendes bemerkt werden. Schreibt man (24) als

$$H(r) = \frac{e^{j k_1 r}}{r} \sqrt{\pi q} \Phi(q)$$

und läßt p' operatorisch zu q gehören, wobei z. B.

$$q \doteq \frac{1}{p'},$$

dann bekommt man für $\Phi(q)$ folgende sehr einfache Abbildung:

$$\Phi(q) \doteq \frac{p'}{\sqrt{p'^2 - j}},$$

woraus sich sofort eine konvergente Reihe nach positiven und eine asymptotische Reihe nach negativen Potenzen von q angeben läßt.

Anhang D

Über die erste Korrektur zu Sommerfelds q -Formel

Wie wir im vorigen Anhang sahen, entsteht diese Formel aus unserer allgemeinen Lösung durch eine nullte Näherung. Wollen wir nun die Annäherung durch Hinzunahme eines Korrektionsstermes verbessern, so hat man allererst zu bedenken, daß jetzt die erste numerische Distanz

$$(25) \quad q_1 = j(k_1 - h)r$$

nicht mehr einen reellen Wert

$$(25a) \quad q_0 = \frac{r k_1^3}{2 |k_2^2|} {}^1)$$

hat, sondern einen komplexen Wert

$$(26) \quad q_1 = q_0 + j \Delta q,$$

wo man für Δq leicht aus (25) und (19) erhält:

$$(27) \quad \Delta q = \frac{3}{8} \frac{r k_1^5}{|k_2^3| \cdot |k_2^3|} = \frac{3}{4} q_0 \frac{k_1^2}{|k_2^3|}.$$

Da wir nun Größen von der Ordnung $k_1^2/|k_2^3|$ neben 1 noch mit berücksichtigen wollen, darf Δq also nicht mehr neben q_0 vernachlässigt werden. Auch brauchen wir in (23a) nun eine Entwicklung von zwei Termen statt einem, also:

1) Sommerfelds q haben wir hier deuthlichkeitshalber q_0 genannt.

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{-\varrho_1} \int_{j\infty}^{\sqrt{\varrho_1}} \frac{e^{w^2} dw}{\sqrt{w^2 + 2jhr}} &= \frac{e^{-\varrho_1}}{\sqrt{2jhr}} \\ &\cdot \left[\int_{j\infty}^{\sqrt{\varrho_1}} e^{w^2} dw - \frac{1}{4jhr} \int_{j\infty}^{\sqrt{\varrho_1}} w^2 e^{w^2} dw \right]. \end{aligned} \right.$$

Im zweiten Integrand kann man $\varrho_1 = \varrho_0$ nehmen, doch im ersten muß nach (26) gesetzt werden:

$$\sqrt{\varrho_1} = \sqrt{\varrho_0} + \frac{1}{2} j \frac{\Delta \varrho}{\sqrt{\varrho_0}}.$$

Der Klammerausdruck in (28) läßt sich dann zerlegen in:

$$\int_{j\infty}^{\sqrt{\varrho_0}} e^{w^2} dw + j e^{\varrho_0} \int_0^{\frac{1}{2} \frac{\Delta \varrho}{\sqrt{\varrho_0}}} e^{2j\sqrt{\varrho_0} t} dt - \frac{1}{4j k_1 r} \int_{j\infty}^{\sqrt{\varrho_0}} w^2 e^{w^2} dw,$$

wo $w = \sqrt{\varrho_0} + jt$ gesetzt wurde.

Im Integrationsintervall von t bleibt $2j\sqrt{\varrho_0}t$ zwischen den Grenzen: 0 und $j\Delta\varrho$.

Ist $\varrho \sim 1$, z. B. $\varrho < 10$, so ist wegen $\Delta\varrho/\varrho \ll 1$ sicher $\Delta\varrho \ll 1$. Also bleibt in der ganzen Integrationsstrecke für t :

$$|2j\sqrt{\varrho_0}t| \ll 1$$

und kann die e -Potenz in zweiten Integral durch 1 ersetzt werden, so daß der zweite Term einfach wird:

$$j e^{\varrho_0} \frac{\Delta \varrho}{2\sqrt{\varrho_0}}.$$

Auch der von ϱ_1 und h abhängige Koeffizient in (28) und gleichfalls die anderen Terme in der allgemeinen Lösung (21) sollen noch unter Anwendung von (26), (27) und einer Entwicklung für h^2 bis auf einen Term genauer bestimmt werden wie früher. Dabei können wir auch jetzt wohl wieder den Dipolterm $e^{jk_2 r}/r$ wegen der großen Dämpfung durch den Imaginärteil von k_2 fortlassen.

Werden in der Rechnung Produkte von Korrekturfaktoren $1/k_1 r$ und $k_1^2/|k_2^2|$ vernachlässigt, so entsteht:

$$H(r) = \frac{e^{jk_1 r}}{r} (U + jV),$$

$$\text{mit } U = u_0 + A_1 u + A_2 u,$$

$$V = v_0 + A_1 v + A_2 v.$$

Hierin sind u_0 und v_0 die schon von Sommerfeld gefundenen Ausdrücke (vgl. (2)):

$$u_0 = 1 - 2\sqrt{\varrho_0} e^{-\varrho_0} \int_0^{\sqrt{\varrho_0}} e^{w^2} dw,$$

$$v_0 = \sqrt{\pi \varrho_0} e^{-\varrho_0}.$$

$A_1 u$ und $A_1 v$ sind Korrektionssterme, die den Faktor $1/k_1 r$ enthalten:

$$A_1 u = e^{-\varrho_0} \frac{\sqrt{\pi \varrho_0}}{8 k_1 r},$$

$$A_1 v = - \frac{e^{-\varrho_0} \sqrt{\varrho_0}}{2 k_1 r} \int_0^{\sqrt{\varrho_0}} w^2 e^{w^2} dw.$$

Dieser Faktor tritt nicht auf in den anderen Termen:

$$A_2 u = \frac{k_1^2}{4 |k_2^2|} \sqrt{\pi \varrho_0} e^{-\varrho_0} (3 \varrho_0 - 1),$$

$$A_2 v = - \frac{k_1^2}{4 |k_2^2|} \sqrt{\varrho_0} e^{-\varrho_0} \left\{ 3 \sqrt{\varrho_0} e^{-\varrho_0} - (6 \varrho_0 - 2) \int_0^{\sqrt{\varrho_0}} e^{w^2} dw \right\}.$$

Für die Praxis hat nur Bedeutung der Modul $|U + jV|$, wofür sich aus Obigem ergibt:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{u_0^2 + v_0^2 + e^{-\varrho_0} \sqrt{\pi \varrho_0} \left(\frac{1 - 2 \varrho_0}{4 k_1 r} - \frac{k_1^2}{2 |k_2^2|} \right)}.$$

Drücken wir noch $|k_2^2|$ mittels (25a) in ϱ_0 und $k_1 r$ aus, so können wir schreiben:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{u_0^2 + v_0^2 + \frac{P}{k_1 r}}$$

mit $P = e^{-\varrho_0} \sqrt{\pi \varrho_0} \frac{1 - 6 \varrho_0}{4}.$

Hier ist $P/k_1 r$ der erwähnte Korrektionsterm, der dem Sommerfeldschen Wert $u_0^2 + v_0^2$ hinzuzufügen ist.

Zusammenfassung

Sommerfelds allgemeine Formel für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über eine ebene Erde wird auf operatorischem Wege in eine andere, ebenfalls exakte Formel übergeführt [vgl. (21)], die keine Integrale über Produkte mit Besselfunktionen enthält und sich deshalb für den praktischen Gebrauch besser eignet. Als Sonderfall leiten wir daraus noch für eine gutleitende Erde die bekannte ϱ -Formel von Sommerfeld ab und geben überdies einen einfachen Korrektionsterm an (vgl. Schluß Anhang D), die als zweite Näherung die ϱ -Formel verbessert und für weniger gut leitende Erde anwendbar macht. Das ganze Problem wurde vom Anfang an operatorisch behandelt, wobei auch Sommerfelds Lösung erreicht werden konnte.

Eindhoven, Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Juni 1930.

(Eingegangen 21. Juni 1930)

Über die Fortpflanzung von Signalen in dispergierenden Systemen

*Erster Teil: Allgemeine Grundlagen. Kontinuierliche Systeme
ohne Verluste*

Von Hans Georg Baerwald¹⁾

(Mit 21 Figuren)

Inhaltsübersicht: I. Fragestellung. Die Grundeigenschaften dispergierender, insbesondere kontinuierlicher Systeme: § 1. Fragestellung und Literaturangaben, § 2. Definition und Fortpflanzungsmaße $k(\omega)$ der drei Systemtypen, § 3. Verlustarme Systeme. Allgemeine Eigenschaften von $R(\omega)$. Grenzfrequenzen, D - und S -Gebiete, § 4. Die Fundamentalsätze über kontinuierliche Dispersionssysteme, § 5. Funktionentheoretischer Ansatz. Signale mit rationalem Spektrum. — II. Mathematische Hauptdurchführung; Entwicklung der allgemeinen Theorie für verlustfreie Kontinua: § 6. Der Grad von $k(\omega)$ als Latenzzeitkriterium. Der „Vorlauf“, § 7. Prinzipielles über die zu verwendende Integrationsmethode, § 8. Gruppengeschwindigkeit und „Signalfrequenzen“; Berechnung der Einzelterm, § 9. Allgemeine Diskussion der Sattelpunktsbahnen als Bild des Signalablaufs. Bedeutung des einzelnen D -Gebietes; die „Quasilatenzeit“, § 10. Fortpflanzung von Signalen mit Hauptfrequenz; die Signalzeit. „Hauptübergang (Aufschaukelzeit)“ und „Quasilatenübergang“. Versagen der abgekürzten Sattelpunktsintegration, § 11. Entwicklung der verallgemeinerten Methode der Sattelpunktsintegration, § 12. Anwendung: Berechnung von Haupt- und Quasilatenübergang; Aufschaukelzeit und Frontverflachung, § 13. Die Signalgeschwindigkeit als asymptotischer Begriff; „lange“ und „kurze“ Distanzen; Dispersionsmaß. Andeutende Behandlung kurzer Distanzen, § 14. Übertragung auf verlustfreie Kontinua ohne Latenzzeit (Quasistationäre Näherung). — Zusammenfassung.

I. Fragestellung. Die Grundeigenschaften dispergierender, insbesondere kontinuierlicher Systeme

§ 1. Fragestellung und Literaturangaben

Die ursprüngliche Anregung zu dieser Arbeit gaben zwei spezielle technische Fragen: Die zeitliche Verzerrung von hochfrequent modulierten elektrischen Wellen, die beim drahtlosen

¹⁾ Dissertation an der Technischen Hochschule zu Breslau.

Fernsehen benutzt werden, beim Durchgang durch ionisierte Schichten und die Frontverflachung von Wanderwellen in Spulen mit Windungskapazität¹⁾, ²⁾. Die mannigfachen Analogien, die sich bei der Durchführung dieser beiden recht verschiedenartigen Aufgaben zeigten, gaben jedoch Veranlassung zu einer viel allgemeineren Fragestellung: Die charakteristischen Verzerrungserscheinungen von nichtstationären Vorgängen (Signalen), die sich in linear-homogenen dispergierenden Systemen von sehr allgemeiner Art ausbreiten, sollten in einheitlicher Form dargestellt werden; und zwar nicht nur für kontinuierliche Systeme, sondern auch für diskontinuierliche [zu denen z. B. die Wagner'schen Kettenleiter³⁾ gehören] sowie für gewisse Kombinationen von beiden, wie sie z. B. in Pupinleitungen oder akustischen Filtern⁴⁾ verwirklicht sind.

Die Durchführbarkeit dieses sehr allgemeinen Problems und damit die Möglichkeit, für gewisse Aufgaben der Physik und Technik generelle Lösungen anzugeben, die die mathematische Diskussion im Einzelfall entbehrlich machen, beruht, wie sich zeigte, darauf, daß den genannten Dispersionssystemen gewisse physikalische Grundeigenschaften gemeinsam sind: die Art der Frequenzabhängigkeit ihres Fortpflanzungsmaßes und damit die abwechselnde Folge von „Durchlässigkeits- und Sperrgebieten“. Daraus können einige allgemeine Sätze über die Frequenzabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit bzw. funktionentheoretisch ausgedrückt: die Lage der Sattelpunkte in der Frequenzebene gefolgert werden, die es gestatten, die Durchführung des Problems mittels der verallgemeinerten⁵⁾ Methode der Sattelpunktsintegration⁶⁾ in der Hauptsache auf das eines einzigen Durchlässigkeitsgebietes zurückzuführen.

In den Vordergrund treten bei der Durchführung der gestellten Aufgabe gewisse allgemeine, für die Dispersionsverzerrungen von Signalen charakteristische Begriffe wie die der „Signalgeschwindigkeit“, „Aufschaukelzeit“ usw.; besonders

1) Mathematischer Ansatz: L 17, S. 285; dort weitere Literatur.

2) Bezeichnung L verweist auf das Literaturverzeichnis.

3) L 35, 37, 39.

4) L 30, 31; L 15.

5) Vgl. § 11. Dieser kann für sich gelesen werden.

6) L 8; L 7, S. 435; L 20.

wichtig wird es daher sein, diese in zweckmäßiger und ausreichender Weise festzulegen, zumal verschiedene Autoren hierüber zu z. T. widersprechenden Aussagen gelangen. Dazu sei hingewiesen auf Sommerfeld¹⁾ und Brillouin²⁾; dieser kommt u. a. zu dem Ergebnis, daß in einem Gebiet selektiver Absorption eines optischen Mediums, das einem kurzen Sperrgebiet äquivalent ist, die Signalzeit zwischen zwei Maximalwerten bis zur Latenzzeit abnimmt, während sie nach Küpfmüller³⁾ bei Annäherung an eine Grenzfrequenz unendlich wird. Beide Autoren stellen übereinstimmend fest, daß in verlustfreien Systemen unter der Signalgeschwindigkeit sinnvoll die Gruppengeschwindigkeit verstanden werden muß. Daß sich indessen verlustarme Systeme hierin z. T. ganz anders verhalten können, wird bei Pollaczek⁴⁾ evident, der bei einem speziellen, schwach dispergierenden Kontinuum, dem homogenen Kabel, einerseits feststellt, daß eine eigentliche „Signalzeit“ nicht einwandfrei definiert, also „willkürlich“ ist (vgl. L 19, S. 62), andererseits findet, daß bei Signalen mit schließlich stationärer Frequenz der flüchtige Signalanteil den stationären u. U. erheblich überreffen kann, was zu einer vom verlustfreien Fall abweichenden Signalzeit führt. Derselbe Autor kommt ferner⁵⁾ zu speziellen Angaben über Einschwingzeit und asymptotische Latenzzeit vielgliedriger Spulenketten. — Küpfmüller⁶⁾ unterscheidet Systeme mit überwiegender „Dämpfungs“- bzw. „Phasenverzerrung“ und gibt für beide Näherungsformeln an, stellt jedoch fest, daß sich diese Unterscheidung in allgemeineren Fällen nicht immer durchführen läßt. Der gleiche Autor stellt die Behauptung auf⁷⁾, daß die Berechnung der Einschwingvorgänge in allgemeinen Systemen, die den Gegenstand der folgenden Ausführungen bildet, nicht in geschlossener Form durchführbar sei.

1) L 25, 26.

2) L 1. Vgl. hierzu auch L 9, wo ein sehr einfaches technisches Beispiel der Signalfortpflanzung in einem dispergierenden System in engem Anschluß an L 1 behandelt wird.

3) L 13, S. 65.

4) L 19.

5) L 20.

6) L 14.

7) L 13, S. 59 und 61.

Die Literaturangaben erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere waren mir leider die einschlägigen amerikanischen Arbeiten, speziell von J. R. Carson, nicht zugänglich, mit Ausnahme seines Buches über die Heavisidesche Operatorenrechnung¹⁾, auf dessen Literaturzusammenstellung verwiesen sei. Dort wird allerdings im allgemeinen der Behandlung mittels reeller Integrale in Form der Operatorengleichung bzw. der Laplaceschen Integralgleichung der Vorzug vor dem hiermit äquivalenten komplexen Fourierintegral und der funktionentheoretischen Methode gegeben; bei den hier behandelten allgemeinen Fragen ist diese aber fraglos allen rein reellen Integrationsprozessen überlegen²⁾.

Im folgenden soll zuerst der allgemeine Ansatz gegeben und die grundlegenden Eigenschaften der behandelten dispergierenden Systeme, zunächst speziell der kontinuierlichen, formuliert werden (§§ 2 bis 5). Darauf wird die Theorie der Signalfortpflanzung in verlustfreien Kontinuen mit Latenzzeit durchgeführt (§§ 6 bis 13) und hierbei die allgemeinen Begriffe der Signalzeit, Aufschaukelzeit, Quasilatenzzeit usw. entwickelt, wobei es notwendig sein wird, die Methode der Sattelpunktsintegration zu verallgemeinern (§ 11); diese Ergebnisse werden dann auf Kontinua ohne Latenzzeit erweitert (§ 14). — In einer anschließenden Arbeit soll die Theorie auf verlustarme Kontinua erweitert werden und später auch auf diskontinuierliche Systeme (symmetrische Vierpolketten). Des weiteren ist eine Zusammenstellung der Ergebnisse und deren Anwendung zur Lösung der eingangs genannten technischen Aufgaben beabsichtigt.

§ 2. Definition und Fortpflanzungsmaße $k(\omega)$ der drei Systemtypen

Die Grundgleichungen der hier untersuchten homogenen Systeme, die, wie vorausgesetzt sei, keine Elemente mit negativer Energiedissipation (negative Widerstände) enthalten, sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, und zwar partielle hyperbolische im Fall von kontinuierlichen, Systeme von gewöhnlichen mit Verknüpfungsbedingungen im Falle von

1) L. 3.

2) Vgl. auch L. 3, S. 76 und S. V.

diskontinuierlichen und Kombinationen von beiden im Falle gemischter Systeme. Sie sind von erster Ordnung simultan für die zwei stets vorkommenden abhängigen Variablen (z. B. Spannung und Strom, elektrischer und magnetischer Vektor, Druck und Mediumstrom usw.) bzw. bei Elimination einer derselben von zweiter Ordnung. Bekanntlich läßt sich für solche stets eine partikuläre Lösung in Form einer fortschreitenden ebenen Welle angeben:

$$(1) \quad P^{(\omega)}(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

worin x die Fortschreitungscoordinate, t die Zeit, ω die (komplexe) Frequenz und

$$(2) \quad k = k(\omega) \quad \text{bzw.} \quad v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

das komplexe Fortpflanzungsmaß bzw. die Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge bedeuten. Im Fall diskontinuierlicher Systeme tritt an Stelle von x der ganzzahlige Stellenzeiger n , doch sei der Einheitlichkeit halber die Benennung x beibehalten. Unter P wird allgemein eine der beiden abhängigen Variablen verstanden, für die andere, I , ist dann die zu (1) gehörige Lösung:

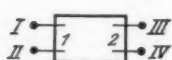
$$(3) \quad I^{(\omega)}(x, t) = \frac{1}{\mathfrak{Z}(\omega)} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Die hierin auftretende Funktion $\mathfrak{Z}(\omega)$ sei (in Übernahme der elektrischen Ausdrucksweise) allgemein als „Wellenwiderstand“ bezeichnet. Die eng miteinander zusammenhängenden Funktionen $k(\omega)$ und $\mathfrak{Z}(\omega)$ geben als „Frequenzcharakteristik“ (vgl. L 14) die Eigenschaften eines Systems völlig wieder, ohne jedoch direkte Aussagen über die Fortpflanzung nichtstationärer Vorgänge zu ermöglichen; dabei wird von den trivialen Fällen in denen sich k/ω und \mathfrak{Z} auf Konstanten reduzieren, abgesehen; die betrachteten Systeme dispergieren also im Sinne der Optik.

Zuerst muß nun der Bereich der hier untersuchten Dispersionssysteme umgrenzt werden. Es wird sich dabei zeigen, daß, unter $R(\omega)$ allgemein rationale Funktionen verstanden, für die Fortpflanzungsmaße der drei Systemtypen, der kontinuierlichen, diskontinuierlichen und gemischten Systeme, folgende Beziehungen gelten:

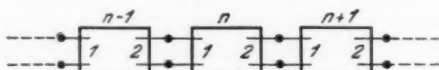
- (4) 1. $k = \sqrt{R(\omega)}$;
 (5) 2. $\cos k = R(\omega)$ bzw. $\sin \frac{k}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - R(\omega)]}$;
 (6 a) 3. $\cos k = R_1(\omega) \cos R_3(\omega) + R_2(\omega) \sin R_3(\omega) \equiv P(\omega)$,
 (6 b) speziell: $\cos k = R_1(\omega) \cos a\omega + R_2(\omega) \sin a\omega$ mit $a = \text{const}$
 im Falle, daß die kontinuierlichen Anteile nicht dispergieren.

Wir beginnen, um diese Ansätze kurz zu erläutern, mit den diskontinuierlichen Systemen. Hierunter sollen zunächst allgemein Ketten von passiven Vierpolen¹⁾ (allgemeine Kettenleiter) verstanden werden. Die Klemmen und Seiten eines Vierpols



Vierpol

Fig. 1 a



Vierpolkette

Fig. 1 b

seien nach Fig. 1 a bezeichnet; Fig. 1 b zeigt dann das $(n-1)$ te bis $(n+1)$ te Glied einer Kette. Wir schreiben die Stromspannungsgleichungen eines Vierpols für den eingeschwungenen Zustand der Frequenz ω in der üblichen Form:

$$(7) \quad \begin{cases} P_1(\omega) = \mathfrak{A}(\omega) P_2(\omega) + \mathfrak{B}(\omega) I_2(\omega) \\ I_1(\omega) = \mathfrak{C}(\omega) P_2(\omega) + \mathfrak{D}(\omega) I_2(\omega) \end{cases}$$

hierin sind P_1, I_1 die primären, P_2, I_2 die sekundären Stromspannungsgrößen und die $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, rationale Funktionen von ω , die wegen des Nichtvorhandenseins von inneren Energiequellen der Bedingung

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} = 1$$

genügen. Wendet man (7) der Reihe nach auf drei aufeinanderfolgende Glieder der Kette an, so kann man darin wahlweise die I - oder P -Größen eliminieren und erhält so für beide die lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung:

$$(9) \quad \Delta \Delta u_n \equiv u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = (\mathfrak{A} + \mathfrak{D} - 2) \cdot u_n,$$

1) Für das Folgende sei auf zusammenfassende Arbeiten über Vierpole hingewiesen, z. B.: L 6, L 32, L 33, L 40.

worin u_n allgemein für $P_n^{(\omega)}$ oder $I_n^{(\omega)}$ gesetzt ist; diese hat unabhängige Partikulärlösungen, welche sich als fort- bzw. rückschreitende Wellen auffassen lassen:

$$(10) \quad P_n^{(\omega)} = P_0^{(\omega)} e^{\mp i n k(\omega)}, \quad I_n^{(\omega)} = I_0^{(\omega)} e^{\mp i n k(\omega)}$$

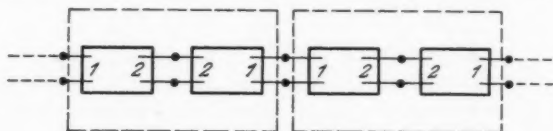
mit

$$(11) \quad \cos k = \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{U}}{2},$$

was der allgemeinen Form (5) entspricht. Als zugehörige Wellenwiderstände findet man leicht:

$$(12) \quad \mathfrak{Z}_{I, II} = \frac{\mathfrak{B}}{e^{\pm i k} - \mathfrak{U}} = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{U}}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{U}}{2}\right)^2}}.$$

Wie sich zeigen wird, bedeutet die Beschränkung auf den wichtigen Spezialfall symmetrischer Vierpole als Kettenglieder



Vierpolkette in Wellenschaltung

Fig. 2

eine große Vereinfachung. [Hierzu kommt man z. B., wenn man die Kette wie in Fig. 2 aufbaut; denn dann ergibt die Zusammenfassung je zweier aufeinanderfolgenden Vierpole stets einen symmetrischen.] Dann ist:

$$(13) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{D};$$

unter Berücksichtigung von (8) enthält der Vierpol damit nur zwei unabhängige Funktionen. Die Vereinfachung gegenüber der allgemeinen Vierpolkette liegt in folgendem: Die \mathfrak{U} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} und also auch $\cos k$ lassen sich dort bekanntlich nicht für alle Frequenzen rational durch realisierbare Impedanzen (passive Zweipole) ausdrücken, z. B. die primären und sekundären Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände:

$$\mathfrak{Z}_{11} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{Z}_{21} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{Z}_{12} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}; \quad \mathfrak{Z}_{22} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}}.$$

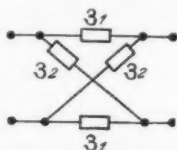
Bei symmetrischen Vierpolen ist das indes stets möglich, da nach Cauer¹⁾ jeder solche einem Kreuzglied (Fig. 3) mit zwei realisierbaren Impedanzen \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 äquivalent ist; diese stehen mit den Vierpolgrößen in der Beziehung:

$$(14) \quad \mathfrak{Z}_t = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2); \quad \frac{1}{\mathfrak{Z}_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right).$$

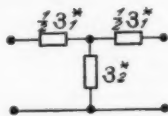
Daraus ergibt sich leicht für die Kettengrößen:

$$(15) \quad \cos k = \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2}; \quad \mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}.$$

Da man über die besonderen Eigenschaften von Funktionen, die realisierbare Impedanzen darstellen, Bescheid weiß²⁾, ist nun auch das Verhalten von $k(\omega)$ in vielen wichtigen Punkten bekannt; auf dieser Kenntnis beruht letzten Endes die später



Kreuzglied
Fig. 3



T-Glied
Fig. 4

zu entwickelnde Theorie der diskontinuierlichen Systeme. — Die Kreuzgliedleiter sind auch als „Kettenleiter 3. Art“ bezeichnet worden.³⁾ Die gewöhnlichen Kettenleiter (1. oder 2. Art), der Gegenstand der ursprünglichen Wagnerschen Theorie⁴⁾ von denen Fig. 4 ein Glied zeigt, und für deren Kettenmaße eine elementare Rechnung

$$(16) \quad \cos k = 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{Z}_1^*}{\mathfrak{Z}_2^*}; \quad \mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_1^* \mathfrak{Z}_2^*}{1 + \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{Z}_1^*}{\mathfrak{Z}_2^*}}}$$

liefert, stellen eine weniger allgemeine Klasse von Systemen dar als die Kreuzgliedleiter: Denn die Impedanzen äquivalenter, d. h. für alle Frequenzen gleiche Leerlauf- und Kurzschluß-

1) L 5.

2) Vgl. L 4.

3) Vgl. z. B. L 39.

4) L 35, 37, 39.

impedanzen besitzender Gebilde nach Figg. 3 und 4 stehen, wie man leicht zeigt, in den Beziehungen:

$$(17) \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1^* = 2 \mathfrak{Z}_1 \\ \mathfrak{Z}_2^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1^* = 2 \mathfrak{Z}_2 \\ \mathfrak{Z}_2^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2) \end{cases}.$$

Bedeutend also \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 beliebige passive Zweipole, so ist $(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)$ oder $\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1$ im allgemeinen Falle nicht mittels positiver Kapazitäten, Induktivitäten und Widerstände realisierbar (vgl. z. B. L 2, L 11, L 4!); mithin gibt es zwar zu jedem Glied 1. oder 2. Art ein äquivalentes Kreuzglied, aber nicht umgekehrt.

Bei der Definition der kontinuierlichen Dispersionssysteme gehen wir von optischen Medien aus. Nach der Drudeschen Dispersionstheorie¹⁾ wird hier:

$$(18) \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sum_{\kappa=1}^n \frac{a_{\kappa}^2}{\omega^2 - 2i\delta_{\kappa}\omega - \alpha_{\kappa}^2}}$$

[c = Lichtgeschwindigkeit, α_{κ} bzw. δ_{κ} = Eigenfrequenz bzw. Eigendämpfung des κ ten Terms; a_{κ} , α_{κ} , δ_{κ} reell positiv]. Dies entspricht der Form (4); speziell ist hier $k(\omega)$ vom Grade 1, und im verlustfreien Grenzfall: $\delta_{\kappa} \rightarrow 0$ ist $R(\omega)$ gerade und für positiv reelle ω zwischen je zwei Polen monoton wachsend. — Eine Verallgemeinerung hiervon bringt der allgemeine „homogene Kettenleiter“. Der einfachste Fall eines solchen ist eine homogene Telegraphenleitung mit gewisser Induktivität, Kapazität, Ohmschem Widerstand und Ableitung pro Längeneinheit. Im allgemeinen Fall wird es sich statt dessen um eine beliebige verteilte Impedanz $\mathfrak{Z}_1(\omega)$ und verteilten Leitwert $1/\mathfrak{Z}_2(\omega)$ handeln²⁾; das bedeutet im Gegensatz zu Diskontinuen schon die allgemeine Klasse von kontinuierlichen Systemen, da kontinuierliche Kreuzgliedleiter nicht realisierbar bzw. nicht allgemeiner sind. Man erhält für sie aus den Maxwell'schen Gleichungen²⁾ die beiden Differentialgleichungen:

1) Vgl. z. B. L 10, S. 93.

2) Inwieweit es sich bei diesen Fiktionen nur um quasistationäre Näherungen der Maxwell'schen Theorie handelt, soll an dieser Stelle noch unerörtert bleiben.

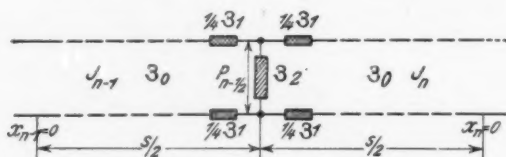
$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{dI^{(\omega)}}{dx} = \frac{P^{(\omega)}}{\mathfrak{Z}_1}; \quad -\frac{dP^{(\omega)}}{dx} = \mathfrak{Z}_1 \cdot I^{(\omega)} \\ \text{(Telegraphengleichungen) bzw. } \frac{d^2 P^{(\omega)}}{dx^2}; I^{(\omega)} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} P^{(\omega)}; I^{(\omega)} \end{array} \right.$$

mit den (10) entsprechenden Partikulärlösungen:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} P^{(\omega)}(x) = P_0^{(\omega)} e^{\mp i x k^{(\omega)}}, \quad I^{(\omega)}(x) = \frac{P_0^{(\omega)}}{\mathfrak{Z}^{(\omega)}} e^{\mp i x k^{(\omega)}} \quad \text{und} \\ k^2 = -\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}, \quad \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2; \end{array} \right.$$

die Beziehung (4) ist also auch hier erfüllt.

Es ist selbstverständlich, daß alle bisherigen Definitionen sich unmittelbar auf mechanische, akustische usw. Systeme übertragen lassen, da dort der Begriff der Impedanz die analoge



Glied eines gemischten Systems

Fig. 5

Bedeutung hat, wir bleiben aber der Einfachheit halber bei der elektrischen Terminologie. In diesem Sinne sollen unter gemischten Systemen Ketten von Gebilden verstanden werden, wie sie Fig. 5 zeigt. Bezeichnet man Fortpflanzungsmaß und Wellenwiderstand der kontinuierlichen Abschnitte mit $k_0(\omega)$ und $\mathfrak{Z}_0(\omega)$, so kann man die längs des n ten Abschnitts veränderlichen Größen in Form hin- und hergehender Wellen darstellen:

$$P_n^{(\omega)} = P_n^{+(\omega)} \cdot e^{-i k_0 x_n} + P_n^{-(\omega)} \cdot e^{+i k_0 x_n};$$

$$I_n^{(\omega)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_0} (P_n^{+(\omega)} \cdot e^{-i k_0 x_n} - P_n^{-(\omega)} \cdot e^{+i k_0 x_n}),$$

wobei x zweckmäßig von der Mitte des jeweiligen Abschnittes aus gemessen ist. Durch Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze auf die Verknüpfungsstellen mit den konzentrierten Impedanzen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ erhält man zwei lineare Beziehungen zwischen

den Amplituden in benachbarten Abschnitten und damit Rekursionsformeln zwischen $(n-1)$ und n , die unabhängig vom Stellenzeiger gelten. Diese sind wie (9) und (19) mittels Exponentialansatzes lösbar, und man erhält so für das Fortpflanzungsmaß des gemischten Systems:

$$(21a) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos k &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_1}{v_2}\right) \cos k_0 s + i \frac{v_1}{2} \left(1 + \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{4} \frac{v_1}{v_2}\right) \sin k_0 s \\ \text{mit } v_1 &= \frac{\beta_1}{\beta_0}, \quad v_2 = \frac{\beta_2}{\beta_0}, \end{aligned} \right.$$

also allgemein die Form (6a); speziell im Fall dispersionsfreier Kontinua wird

$$(21b) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos k &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_1}{v_2}\right) \cos \frac{s}{c} \omega \\ &+ i \frac{v_1}{2} \left(1 + \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{4} \frac{v_1}{v_2}\right) \sin \frac{s}{c} \omega \end{aligned} \right.$$

(vgl. Fig. 5), wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesen ist, also Form (6b). Oft sind als konzentrierte entweder nur Längs- oder nur Querimpedanzen vorhanden; das erste ist z. B. der Fall bei Pupinleitungen, das zweite bei akustischen Wellenfiltern (vgl. L 30, 31; L 15) [bei diesen ist unter β_0 der „Schallwiderstand“ pro Quadratzentimeter (L 34, S. 570 und 651) zu verstehen]. Damit wird einfacher:

$$(22a, b) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos k &= \cos \frac{s}{c} \omega + i \frac{v_1}{2} \sin \frac{s}{c} \omega \\ \text{bzw. } \cos k &= \cos \frac{s}{c} \omega + \frac{i}{2 v_2} \sin \frac{s}{c} \omega. \end{aligned} \right.$$

§ 3. Verlustarme Systeme. Allgemeine Eigenschaften von $R(\omega)$. Grenzfrequenzen, D - und S -Gebiete

Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, daß $k(\omega)$ und $\beta(\omega)$ in der komplexen ω -Ebene die gleichen Verzweigungsstellen haben — was sich übrigens direkt aus den Ausgangsdifferentialgleichungen ergibt —, die mit ω_g bezeichnet seien; im folgenden genügt deshalb die Betrachtung von $k(\omega)$. Der Bereich der rationalen Funktionen:

$$(23) \quad R(\omega) = \frac{Z(\omega)}{N(\omega)}$$

von (4)–(6) ist durch (15), (20), (21) erheblichen Einschränkungen unterworfen, die zu fundamentalen Aussagen führen

werden. Zuvor soll dieser Bereich indessen aus physikalischen Gründen noch in anderer Hinsicht eingengt werden. Wir werden zunächst verlustfreie Systeme behandeln, später verlustarme, dagegen sind solche mit erheblicher Verlustdämpfung hier ohne Interesse. Unter Verlustarmut wird präziser folgendes verstanden: Die eingeführten Grundimpedanzen \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 bzw. realisierbare Schaltkombinationen aus ihnen sollen keine aperiodischen Eigenfrequenzen haben, speziell die Wurzeln jeder charakteristischen Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{Z}_1(\omega)}{\mathfrak{Z}_2(\omega)} = \lambda$$

mit reellem nicht positivem λ reell oder konjugiert reelle Paare sein:

$$(24) \quad \omega_\lambda = \pm \alpha_\lambda + i \delta_\lambda;$$

dabei bedeuten α_λ und δ_λ reelle nicht negative Konstanten, für die

$$(25a) \quad \left(\frac{\delta_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)^2 \leq 1$$

sein soll, also

$$(26a) \quad R(\omega) \sim \text{reell}$$

bzw. im verlustfreien Fall:

$$(25b, 26b) \quad \delta_\lambda = 0 \quad \text{und} \quad R = f(\omega^2) = \text{reell}.$$

Durch die Forderung (24) werden Systeme mit aperiodischen Bestandteilen ausgeschlossen. Solche können gleichwohl noch „verlustarm“ im gewöhnlichen Sinne sein, dispergieren aber im Gegensatz zu den hier behandelten allein vermittelt ihrer frequenzabhängigen Verlustdämpfung, also gar nicht im verlustfreien und nur schwach im verlustarmen Fall. Die Nichteinbeziehung solcher Systeme geschah im Interesse der einheitlicheren Darstellung, da die hier in erster Linie interessierenden charakteristischen Dispersionserscheinungen bei ihnen zurücktreten; prinzipielle Schwierigkeiten würde ihre Mitbehandlung nicht machen.¹⁾

1) Ein einfaches in diesem Sinne aperiodisches System ist z. B. das homogene Kabel (vgl. Pollaczek, L 19) mit

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{R}{i\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{i\omega C}\right)};$$

Aus (15) und (20) resultieren nun einige wichtige Aussagen über die in (4) und (5) eingehenden rationalen Funktionen. Setzen wir zunächst Verlustfreiheit voraus, so haben nach Cauer (L 4, S. 14)¹⁾ die Grundimpedanzen die allgemeine Form:

$$(27) \quad \mathcal{Z} = \frac{h}{i\omega} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)(\omega^2 - \omega_{2n}^2)^e}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)},$$

worin $(-1)^e \cdot h$ und die ω_k reell und positiv und ihre Anordnung

$$(27a) \quad 0 \leq \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{2n-1} < \omega_{2n} < \infty$$

ist, sowie

$$(27b) \quad e = \begin{cases} 0 \\ \text{oder } +1. \end{cases}$$

Im Falle $e = 0$ verhält sich \mathcal{Z} für sehr hohe Frequenzen ($\omega > \omega_{2n}$ kapazitiv²⁾), bei $e = 1$ induktiv, im Falle $\omega_0 \neq 0$ bzw. $\omega_0 = 0$ gilt das gleiche für $\omega \rightarrow 0$. $\frac{\mathcal{Z}}{i\omega}$ wächst für positive ω zwischen je zwei Polen monoton. Der verlustarme Fall in seiner obigen Definition unterscheidet sich nur dadurch, daß die Wurzeln und Pole $\pm \omega_k$ von \mathcal{Z} kleine positive Imaginärteile δ_k erhalten. Bei den jetzt folgenden Betrachtungen kann man sich auf Verlustfreiheit beschränken, da sich dieselben auf verlustarme Systeme unmittelbar übertragen lassen. Spezielle Folgerungen aus (24)–(27) sind die Spiegelbildlichkeit von $\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}$ zur reellen Achse sowie die Tatsache, daß $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ keine einfachen, sondern höchstens Doppelwurzeln

die Verzweigungsstellen liegen hier bei $i\frac{R}{L}$ und $i\frac{G}{C}$, also im verlustarmen Fall nahe bei 0 bzw. nahe beieinander; daher nur schwache Dispersion. Falls die „Verzerrung“ verschwindet: $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ findet überhaupt keine Dispersion statt.

1) Das Reaktanztheorem (27) war schon vor Cauer bekannt. Es wurde erstmalig ohne Beweis von Campbell (L 2) angegeben und findet sich bei Foster (L 11). Es ist letzten Endes in der Theorie der kleinen Schwingungen der Mechanik enthalten (vgl. L 23).

2) Hierbei muß im Fall konzentrierter Impedanzen praktisch die Beschränkung auf Frequenzen vorausgesetzt werden, wo die quasi-stationäre Betrachtung derselben noch zulässig ist (Wellenlänge \gg Linear-dimens. d. Imped.).

oder -pole von $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ sein können, also *keinesfalls* Verzweigungsstellen von $k(\omega)$. Schließlich kann der Grad 2ρ von $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ nur sein:

$$(28) \quad 2\rho = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ \text{oder } -2, \end{cases}$$

je nach dem kapazitiven oder induktiven Verhalten von $\beta_{1,2}$ bei hohen Frequenzen.²⁾

Auf den in der Hauptsache in (4)–(6), (15), (20), (21) und (24)–(28) zusammengefaßten Grundlagen beruhen die im folgenden ausgesprochenen allgemeinen Dispersionssätze, die das Fundament der Theorie der Signalfortpflanzung in dispergierenden Systemen bilden. Wir gehen hierzu aus von den für das einzelne System charakteristischen Punkten, den Verzweigungsstellen ω_g . Sie liegen nach dem Vorangehenden sämtlich konjugiert reell auf (bzw. ein wenig oberhalb) der reellen Achse. Allen betrachteten Dispersionssystemen ist nun nach (4)–(6) gemeinsam, daß ihre Verzweigungsstellen von 2. Ordnung sind.³⁾ Das hat folgende Konsequenz: Wir denken uns eine reelle, von ω_g verschiedene Frequenz α , deren Fortpflanzungsmaß reell ist, für die also $R(\alpha) > 0$ im Falle (4), $|R(\alpha)| < 1$ bzw. $|P(\alpha)| < 1$ im Falle (5) bzw. (6) gilt; das bedeutet nach (1)–(3) eine harmonische ungedämpfte Fortpflanzung; da mit k auch β reell ist, liegen dann P und I in Phase, mit der Welle wird also gleichbleibende Energie in der positiven x -Richtung transportiert. Denkt man sich α längs der reellen Achse verschoben, so ändert sich hieran so lange nichts, bis α an eine Stelle ω_g kommt. Bei der Weiterbewegung geht α unmittelbar unterhalb ω_g vorbei, da entsprechend dem Grenzübergang vom verlustarmen Fall her ω_g kurz über der reellen Achse zu denken ist. Nach Passieren von ω_g ist aber $k(\alpha)$, weil ω_g eine Verzweigungsstelle 2. Ordnung ist, rein imaginär³⁾, die Fortpflanzung erfolgt also mit x

1) Hierunter wird die Differenz der Grade von Zähler und Nenner verstanden.

2) Vgl. Anm. 2) der vorangehenden Seite!

3) D. h. in Umgebung einer solchen verhält sich $k(\omega)$ wie

$$(\omega - \omega_g)^{\pm \frac{1}{2}}.$$

exponentiell; zugleich wird β imaginär, P und I um $\pi/2$ phasenverschoben. Da das System nach Voraussetzung keine inneren Energiequellen enthält, folgt, daß ein exponentieller Anstieg unmöglich ist; $k(\alpha)$ muß daher im Gebiet zwischen der passiertten und der nächsten Verzweigungsstelle ω_j negativ imaginär sein. Die ω_j haben also wie bei den bekannten Siebketten allgemein die Eigenschaft, die abwechselnd liegenden „Durchlässigkeits“- und „Sperrgebiete“ (D- und S-Gebiete) zu trennen, und werden demgemäß Grenzfrequenzen genannt. — Wir denken uns die Verzweigungsschnitte der zweiblätterigen Riemannschen $k(\omega)$ -Fläche geradlinig zwischen je zwei benachbarten ω_j durch die S-Gebiete gezogen¹⁾; dann soll also im oberen Blatt, wo die α zu denken sind, $k(\omega)$ auf der Unterseite eines Schnittes negativ imaginär sein.

§ 4. Die Fundamentalsätze über kontinuierliche Dispersionsysteme

Von hier an beschränken wir uns gemäß dem Programm am Ende von § 1 im Rahmen dieser Arbeit auf kontinuierliche Systeme. Für diese kann man auf Grund der bisher entwickelten Eigenschaften folgende Fundamentalsätze beweisen:

Satz I. Die Funktion $k'(\omega) \equiv \frac{dk}{d\omega}$ ²⁾ ist in den D-Gebieten aller Kontinuen ≥ 0 ; das Gleichheitszeichen gilt nur für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, falls diese Stellen keine Doppelwurzeln von $R(\omega)$ sind.

Satz II. $k'(\omega)$ hat nirgends ein endliches reelles Maximum oder Extremum höherer Ordnung und läuft in jedem D-Gebiet von $+\infty$ über ein positives Minimum — wo $k'' > 0$ — wieder nach $+\infty$, $k''(\omega)$ läuft entsprechend in einem D-Gebiet der rechten Halbebene positiv monoton von $-\infty$ nach $+\infty$ (also in der linken negativ monoton).

Satz III. Die beiden Arten von Grenzfrequenzen, an denen $R(\omega)$ 0 bzw. ∞ wird, und die mit ω_Z bzw. ω_N bezeichnet seien, liegen in einer Halbebene stets abwechselnd, und zwar

1) Das ist als reine Konvention anzusehen.

2) $k'(\omega)$ bedeutet physikalisch die reziproke Gruppengeschwindigkeit (vgl. unten).

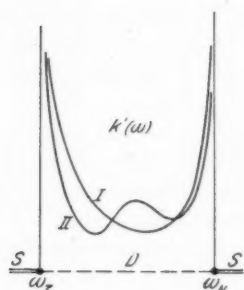
sind in der rechten die ω_z untere, die ω_N obere Grenzfrequenzen — links umgekehrt.

Satz IV. $R(\omega)$ hat keine endlichen, von 0 verschiedenen Doppelwurzeln und -pole.

Zum Beweise dieser Sätze beachte man zunächst, daß entsprechend dem Verzweigungscharakter der Stellen ω_g die Forderung: „ $k(\omega)$ = negativ imaginär nahe einer Grenzfrequenz am unteren Rand eines Schnittes im oberen Blatt“ äquivalent ist mit der anderen: „ $k'(\omega)$ = positiv reell im verzweigungsfreien (D)-Gebiet nahe einer Grenzfrequenz im oberen Blatt“. Man verifiziert das leicht, indem man $k(\omega)$ in Umgebung einer Grenzfrequenz entwickelt und in Polarkoordinaten schreibt (vgl. Fußnote 3, S. 308). Nun ist in $k = \sqrt{R(\omega)}$ das Vorzeichen der Wurzel in allen D-Gebieten im oberen Blatt das gleiche und soll als positiv festgesetzt werden — was physikalisch bedeutet, daß die Phase einer harmonischen Welle in der Fortschrittingsrichtung zunimmt —; daraus zusammen folgt aber *Satz III*. — Eine Doppelwurzel oder ein Doppelpol von $R(\omega)$ kann als Zusammenrücken zweier gleichartiger Grenzfrequenzen gedeutet werden; da zwischen diesen aber eine der anderen Art liegt, so würden sich die zwei gleichen Linearfaktoren in $Z(\omega)$ und $N(\omega)$ (23) fortheben. Damit folgt *Satz IV*.

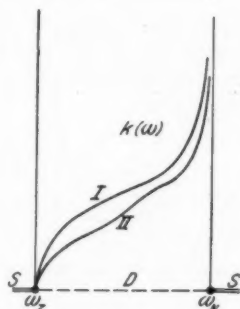
Satz I beweisen wir indirekt: Da $k'(\omega)$ an den Enden eines D-Gebietes > 0 und $\sqrt{R(\omega)}$ in D positiv ist, könnte wegen $k' = \frac{R'}{2\sqrt{R}}$ (4) k' in D nur durch einen Vorzeichenwechsel von R' negativ werden; ein solcher müßte aber wegen des gleichen Vorzeichens an den Enden von D mindestens zweimal erfolgen — oder im Grenzfall in Form eines horizontalen Wendepunktes von R —, und zwar wegen der Spiegelbildlichkeit von R in wenigstens zwei D-Gebieten. Das hätte die Existenz mindestens einer zur reellen Achse parallelen Geraden zur Folge, die in diesen beiden D-Gebieten allein die Kurve $R(\omega)$ sechsmal schneidet. Außerdem schneidet sie $R(\omega)$ — bei im übrigen monotonem Verlauf — in jedem anderen D-Gebiet einmal, wobei ein solches, das $\omega = 0$ oder $\omega = \infty$ enthält, doppelt zu zählen ist. Das wären, wenn $2r$ den höheren der beiden Grade von $Z(\omega)$ und $N(\omega)$ bezeichnet

[vgl. (23) und (28)], im ganzen $(2r + 4)$ Schnittpunkte. Das ist aber ein Widerspruch, da die Gleichung $\frac{Z(\omega)}{N(\omega)} = \text{const}$ nur $2r$



Verlauf von $k'(\omega)$

Fig. 6

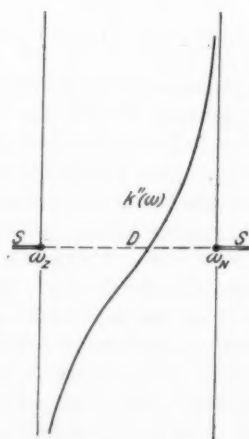


Verlauf von $k(\omega)$

Fig. 7

Wurzeln hat. Damit ist Satz I bewiesen.

Satz II folgt ebenfalls indirekt: Hätte $k'(\omega)$ innerhalb eines D-Gebietes nicht den geforderten allgemeinen Verlauf (Kurve I in Fig. 6), sondern drei Extrema (Kurve II) — die event. auch in ein Extremum höherer Ordnung zusammenfallen können, d. h. zugleich $k'' = 0$ und $k''' = 0$ —, so müßte $k(\omega)$ entsprechend drei Wendepunkte haben (Fig. 7) — bzw. einen Wendepunkt 3. Ordnung —; es müßte also Gerade geben, die $k(\omega)$ in D fünfmal schneiden. Dieselben müßten die Kurve $k(\omega)$



Verlauf von $k''(\omega)$

Fig. 8

außerdem so oft schneiden, als Unendlichkeitsstellen ω_N vorhanden sind, abgesehen von der, die das gerade betrachtete D-Gebiet abschließt, also im ganzen $(2r + 4)$ mal, wenn $2r$

den Grad von $N(\omega)$ bedeutet. Nun ist die Gleichung dieser Schnittpunkte von der Form:

$$k(\omega) = c_1 \omega + c_2 \quad \text{bzw.} \quad Z(\omega) = N(\omega)(c_1 \omega + c_2)^2,$$

also vom $(2r+2)$ ten Grad in ω . Daher kann es nur $(2r+2)$ Schnittpunkte geben; also ist nur ein Verlauf wie I (Figg. 6, 7), von k und k' , bzw. von k'' , wie in Fig. 8 gezeigt, möglich: *Satz 11.*

§ 5. Funktionentheoretischer Ansatz. Signale mit rationalem Spektrum

Der allgemeine Ausdruck für die Signalfortpflanzung ist als Zusammenfassung vieler monochromatischer Wellen ein im oberen Blatt der $k(\omega)$ -Ebene geführtes Integral von der Form:

$$(29a) \quad P(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty)} F(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega$$

bzw.

$$(29b) \quad P(x, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty)} F(\omega) e^{ix(\omega T - 1)} d\omega, \quad T = \frac{t}{x};$$

unter $\int_{(\infty)} \dots d\omega$ sei ein im Einzelfall näher zu beschreibender Integrationsweg verstanden, der in zwei Richtungen nach ∞

läuft, speziell in (29) von $-\infty$ nach $+\infty$ in Richtung der reellen Achse unterhalb aller singulären Stellen des Integranden. Man kommt hierzu, indem man das gegebene Signal: $P(0, t)$ als komplexes Fourierintegral schreibt. Unter „Signal“ wird zunächst allgemein ein Vorgang $P(t)$ verstanden, der für genügend kleine t identisch verschwindet, also zu einer endlichen Zeit, die als $t=0$ gewählt wird, einsetzt. Bei großem t braucht er indessen nicht zu verklingen, sondern kann z. B. in einen stationären Schwingungszustand $e^{i\alpha t}$ übergehen; das komplexe Fourierintegral behält im Gegensatz zum reellen bekanntlich auch dann seinen Sinn. Das fortgepflanzte Signal $P(x, t)$ wird in diesen Fällen nach einem noch von dem System und der Tiefe x abhängenden Zeitintervall des „Einschwingens“ schließlich ebenfalls stationär von der Frequenz α :

$$(30) \quad P_\alpha(x, t) = \text{const.} \cdot e^{i[\alpha t - k(\alpha)x]},$$

in diesem Sinne soll vom „flüchtigen“ und „stationären“ Signal in der Tiefe x gesprochen werden.

In dem Exponentialfaktor von (29) kommen mittels $k(\omega)$ die Eigenschaften des Systems zum Ausdruck, während die sogenannte „Beifunktion“ $F(\omega)$ das komplexe Spektrum des aufgegebenen Signals $P(0, t)$ bedeutet; letzteres trifft allerdings nur für eine fortschreitende Welle bzw. in ∞ langen Systemen zu, bei begrenzten treten infolge der Randbedingungen, d. h. durch Reflexionen in $F(\omega)$ noch der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}(\omega)$ auf und Funktionen, die von den Impedanzen der Ein- und Ausgangsschaltung herrühren. Da indessen diese rational sind und $\mathfrak{Z}(\omega)$ wie $k(\omega)$ verzweigt ist, ergeben sich hierdurch keine prinzipiellen mathematischen Erschwerungen; physikalisch ist das sofort einleuchtend, da die charakteristischen Verzerrungserscheinungen von der Dispersion des Systems herrühren und, vorausgesetzt daß dieses genügend lang ist, die ausschlaggebende Rolle spielen. Der Begriff der „Systemlänge“ wird später (§ 13) mathematisch präzisiert werden. — Die im folgenden entwickelte Theorie hat entsprechend der Fragestellung lange Systeme zum Gegenstand, ist also im wesentlichen eine asymptotische Theorie; das kommt schon darin zum Ausdruck, daß von den bei solchen Fragen allgemein anwendbaren Methoden: Entwicklung in erzwungene und Eigenschwingungen [Residuensatz; Heavisidesche Formel (L 3, S. 29)] oder in fort- und rückschreitende Wellen die zweite als die geeignete gewählt wurde. Aus dem genannten Grunde wird dann wie bei ∞ langen Systemen gerechnet, d. h. unter $F(\omega)$ das Signalspektrum allein verstanden werden.

Unter Ausschluß von verzweigten Funktionen und nicht-exponentiellen Transzendenten¹⁾ sei dann $F(\omega)$ auf rationale Funktionen beschränkt. Durch Partialbruchzerlegung erhält man dann Integrale der Form:

$$(31) \quad P(x, t) = \sum_n C_n \int_{(\gamma)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{(\omega - \alpha_n)^{\nu_n}} d\omega,$$

deren Integrationsweg längs der reellen Achse unterhalb von

1) Im Falle exponentieller Abhängigkeit kann $F(\omega)$ mit dem Exponentialglied zusammengefaßt werden.

α und der Stellen ω verläuft. Im einfachsten Fall reduziert sich $F(\omega)$ auf eine Konstante:

$$(32a) \quad P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(\infty)} e^{i(\omega t - kx)} d\omega.$$

Hierin kommen, da das Signalspektrum alle Frequenzen gleichmäßig enthält, die Eigenschaften des Mediums rein zum Ausdruck. Das aufgegebene Signal:

$$(32b) \quad P(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\infty)} e^{i\omega t} d\omega$$

wird hierbei durch eine „Zackenfunktion“ $z(t)$:

$$(32c) \quad z(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ \infty; & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} z(t) dt = 1; \quad \text{z. B.: } z(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{t^2}{\delta}}}{\sqrt{\pi \delta}}$$

dargestellt und sei als „Zackensignal“ oder allg. „Signal ohne Hauptfrequenz“ bezeichnet. — Im Falle $\nu = 1$ ist $F(\omega) = \frac{\text{const}}{\omega - \alpha}$ ein Resonanzterm mit der „Hauptfrequenz“ α . Das zugehörige Signal:

$$(33a) \quad P(0, t) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} d\omega,$$

das mathematisch einen Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor darstellt, hat den Verlauf:

$$(33b) \quad P(0, t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ e^{i\alpha t}; & t > 0 \end{cases}$$

und soll „Einsatzsignal“ bzw. allgemein „Signal mit Hauptfrequenz“ genannt werden. Den Fall $\nu > 1$ kann man durch partielle Integration auf $(\nu - 1)$ und damit auf $\nu = 1$ zurückführen; z. B.:

$$(34) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{(\infty)} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \alpha)^2} d\omega = \frac{t}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} d\omega = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ t e^{i\alpha t}; & t > 0 \end{cases}.$$

Aus Einsatzsignalen lassen sich Signale, die durch Schwingungsvorgänge in konzentrierten linearen Systemen erzeugt werden, linear zusammensetzen.¹⁾ Speziell erhält man für das

1) Vgl. die Heavisidesche Formel („Expansion, Theorem“), z. B. L 3, S. 29, L 18, S. 298.

cos- und sin-Signal [Real- bzw. Imaginärteil von (33b)] der reellen Frequenz α :

$$(35a) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{\cos}(x, t) &= \frac{1}{2} [P(\alpha) + P(-\alpha)] \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{(\infty)} \frac{\omega}{\omega^2 - \alpha^2} e^{i(\omega t - kx)} d\omega; \end{aligned} \right.$$

$$(35b) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{\sin}(x, t) &= \frac{1}{2i} [P(\alpha) - P(-\alpha)] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{(\infty)} \frac{\alpha}{\omega^2 - \alpha^2} e^{i(\omega t - kx)} d\omega \end{aligned} \right.$$

und die „Stirnwelle“ $\alpha = 0$:

$$(35c) \quad P_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega} d\omega,$$

die „Übergangsfunktion“ des Systems (vgl. L 2, S. 312). Unter α sei im folgenden eine endliche reelle Frequenz verstanden, da hierin alles Charakteristische enthalten ist; der übrigens nicht schwieriger zu behandelnde Fall komplexer α wird in einer anschließenden Arbeit gestreift werden.

II. Mathematische Hauptdurchführung;

Entwicklung der allgemeinen Theorie für verlustreiche Kontinua

§ 6. Der Grad von $k(\omega)$ als Latenzzeitkriterium.

Der „Vorlauf“

In diesem Teil wird die Theorie der Signalfortpflanzung in verlustfreien Kontinuen durchgeführt; nur in § 6 ist die Verlustfreiheit noch nicht vorausgesetzt. — Eine für den Ausbreitungsvorgang in einem System in gewisser Hinsicht charakteristische Größe ist sein Grad ϱ [vgl. (28)]; wir zeigen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Latenzzeit in einem Kontinuum ist

$$(36) \quad \varrho = 1.$$

Hierzu ziehen wir den bei (29) beschriebenen Integrationsweg in eine große Entfernung von $\omega = 0$ in der unteren Halbebene; das ist erlaubt, da nach Definition [bei (29)] der

Integrand unterhalb des ursprünglichen Weges regulär ist. Auf dem neuen Weg sei überall:

$$|\omega| > \left\{ \frac{\alpha}{|\omega_\varphi|_{\max}} \right\};$$

das kann stets erfüllt werden, da nach § 3 $\omega = \infty$ kein Verzweigungspunkt ist. Dann gelten dort absolut und gleichmäßig konvergente Potenzentwicklungen nach $1/\omega$:

$$(37) \quad F(\omega) = \frac{a_0}{\omega^\nu} \left\{ 1 + \frac{a_1}{\omega} + \frac{a_2}{\omega^2} \dots \right\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(38) \quad k(\omega) = b_0^* \omega^\varrho \left\{ 1 + \frac{b_1^*}{\omega} + \frac{b_2^*}{\omega^2} \dots \right\}.$$

Man erhält also aus (29), (31), durch Potenzentwicklung von $\frac{\text{const}}{e^{-\omega^p}}$, $p = 1, 2, \dots$;

$$(39) \quad P(x, t) = \text{const} \int_{(\infty)} \Re \left(\frac{1}{\omega} \right) e^{it\omega} \frac{d\omega}{\omega^\nu},$$

worin \Re eine gleichmäßig konvergierende Potenzreihe in $1/\omega$ mit konstantem Anfangsglied bedeutet und

$$(40) \quad t = t \text{ für } \varrho = 0 \text{ und } \varrho = -1; \quad t = t - b_0^* x \text{ für } \varrho = 1$$

ist. P verschwindet für alle $t < 0$ identisch, da

$$P \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} r e^{-tr e^{i\varphi}} \cdot e^{it\varphi} d\varphi = 0.$$

Für $t > 0$ verschwindet das entsprechende Integral in der oberen Halbebene, man kann dann mit demselben den ursprünglichen offenen Weg zu einem Vollumlauf um $\omega = \infty$ ergänzen. Für diesen kann aber (39) wegen der Residuen der einzelnen Glieder sicher nicht identisch verschwinden. Damit ist die Behauptung (36) bewiesen. Für $\varrho = 1$ schreiben wir nach § 3 und Gl. (38):

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} k(\omega) = \frac{\omega}{v_k} \left(1 - i \frac{b_1}{\omega} - \frac{b_2}{\omega^2} \dots \right), \quad \frac{b_1}{b_2} \text{ reell, } > 0; \\ t = t - \frac{x}{v_k} = t - t_0 \end{array} \right.$$

mit der Kopfgeschwindigkeit (Fortpflanzungsgeschwindigkeit)

$$(42) \quad v_k = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k}{\omega}$$

und der Latenzzeit t_0 . Das Glied: $-i \frac{b_1}{\omega}$ kann zufolge (26) nur eine Verlustdämpfung bedeuten.

Erwähnt sei, daß bekanntlich alle — im Sinne der klassischen Physik — physikalisch streng behandelten Kontinua eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben¹⁾; die Latenzzeit entfällt nur bei quasistationären Näherungen, von denen z. B. beim Thomsonkabel²⁾ oder dem eingangs erwähnten und in einer folgenden Arbeit durchgeführten Beispiel der Wanderwellenschutzspule Gebrauch gemacht wird.

Im folgenden wird die Theorie der Signalfortpflanzung zunächst für Kontinua mit Latenzzeit (36) durchgeführt. Für diese liegt zufolge der Sätze von § 4 der allgemeine Verlauf von $R(\omega)$ fest: Da in jeder Halbebene eine untere Grenzfrequenz ω_z mehr vorhanden ist als obere ω_N , muß sowohl die absolut größte wie kleinste eine ω_z -Stelle sein, also $\omega = \infty$ in einem D -Gebiet (D_∞) liegen — was wir schon aus (38) und (41) wissen — und $\omega = 0$ in einem S -Gebiet, das aber auch auf 0 zusammenschrumpfen kann, so daß $\omega = 0$ Doppelwurzel von $R(\omega)$ wird (§ 3). Die Grenzfrequenzen ω_z und ω_N sowie die D - und S -Gebiete denken wir uns von $\omega = \infty$ aus fortlaufend numeriert.

Wir führen nun unser Grundintegral (29) in der Weise aus, daß wir wie eben den Integrationsweg in eine große Entfernung ausziehen. (39) ergibt dann für $t = 0$:

$$(43) \quad P(x, t_0) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{d\omega}{\omega^\nu} = \begin{cases} \infty; & \nu = 0 \\ \frac{a_0}{2} e^{-b_1 t_0}; & \nu = 1; \\ 0; & \nu > 1 \end{cases}$$

für $t > 0$ beim Vollumlauf:

$$P(x, t) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi i} \oint_{(\infty)} \frac{e^{it\omega}}{\omega^\nu} \sum_0^\infty c_\kappa \omega^{-\kappa} d\omega;$$

$$c_\kappa = c_\kappa(x), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = a_1 + i b_2 t_0, \dots$$

1) Vgl. z. B. den Fall der Optik (18); L 25, 26!

2) Vgl. hierzu z. B. L 21.

Da $\frac{e^{it\omega}}{\omega^\mu}$ das Residuum $\frac{(it)^\mu - 1}{(\mu - 1)!}$ liefert, bekommt man für $t > 0$ eine Potenzentwicklung nach t :

$$(44) \quad \begin{cases} P(x, t) = \frac{(it)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} a_0 e^{-b_1 t_0} \\ \quad \cdot \left\{ 1 + i \frac{c_1(x)}{\nu} t - \frac{c_2(x)}{\nu(\nu+1)} t^2 \dots \right\}; \\ \nu > 0 \quad (\nu = 0: \text{vgl. unten!}), \end{cases}$$

die gemäß ihrer Herleitung gleichmäßig in x und t konvergiert. Man kann sie auch in anderer Form schreiben, indem man in der Entwicklung (41) von $k(\omega)$ noch das Glied mit $1/\omega$ im Exponenten beibehält:

$$P(x, t) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi i} \oint_{(\infty)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) e^{i\left(t\omega + \frac{b_2 t_0}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega^\nu},$$

worin wieder

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sum_0^\infty \frac{g_\kappa}{\omega^\kappa}$$

für $|\omega| > \left\{ \left| \omega_\vartheta \right|_{\max} \right\}^\alpha$ absolut und gleichmäßig konvergent ist; oder mit

$$(45) \quad b_2 t_0 = b_2 \frac{x}{v_k} \equiv \xi,$$

Vertauschung von Summation und Integration und der Substitution $\omega = \sqrt{\frac{\xi}{t}} e^{i\varphi}$:

$$P(\xi, t) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi} \sum_{\kappa=0}^\infty \left\{ g_\kappa \left(\frac{t}{\xi} \right)^{\frac{\nu+\kappa-1}{2}} \cdot \int_{(2\pi)} e^{-i(\nu+\kappa-1)\varphi} e^{2i\sqrt{\xi t} \cos \varphi} d\varphi \right\};$$

hierbei bedeutet $\int_{(2\pi)}$ die Integration längs eines Stückes zwischen zwei Parallelen zur imaginären φ -Achse mit dem Abstand 2π ,

auf das sich der Umlauf in der ω -Ebene abbildet. Man erhält also:

$$(46) \quad P(\xi, t) = a_0 e^{-b_1 t_0} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ g_{\kappa} \left(-i \sqrt{\frac{t}{\xi}} \right)^{\nu+\kappa-1} \cdot J_{\nu+\kappa-1}(2\sqrt{\xi t}) \right\}$$

[J_{μ} = Besselsche Funktion μ -ter Ordnung; vgl. Janke-Emde, S. 169!]; speziell für das sin-Signal (35) wird

$$(47) \quad P_{\sin}(\xi, t) = a_0 e^{-b_1 t_0} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{t}{\xi}} J_1(2\sqrt{\xi t}) + \dots,$$

was — bis auf den Dämpfungsfaktor:

$$(48) \quad e^{-b_1 t_0} \quad \text{—}$$

mit dem von Sommerfeld gefundenen Ausdruck für die „Vorläufer“ übereinstimmt.¹⁾

Aus den Ergebnissen (43) ÷ (47) folgt nun zunächst, daß der Signalkopf bis auf den Dämpfungsfaktor (48) stets getreu übertragen wird. Wir zeigen dies für das Zackensignal (32). Hier wird mit

$$(49) \quad \begin{aligned} & \nu = 0; \quad a_0 = i; \quad a_1 = a_2 = \dots = 0: \\ P(x, t) = & \begin{cases} \infty & ; \quad t < 0, \\ 0 & ; \quad t = 0, \\ i e^{-b_1 t_0} \left\{ c_{10}(x) + i \frac{c_{20}(x)}{1!} t \dots \right\} & ; \quad t > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $c_{\kappa 0} = c_{\kappa}(x; a_j = 0)$. Bei x kommt also ebenfalls ein Zackensignal an, dessen Fläche, wie aus:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t P dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega} d\omega = \\ & e^{-b_1 t_0} \cdot \left\{ 1 + i \frac{c_{10}(x)}{1!} t - \frac{c_{20}(x)}{2!} t^2 \dots \right\}; \quad t > 0 \end{aligned}$$

ersichtlich ist, bis auf (48) die gleiche ist wie bei $x = 0$ [s. (32)]. Ebenso sieht man, daß der Sprung beim Beginn des Einsatzsignals (33), der der zeitlichen Ableitung beim sin-Signal (35) usw., mit dem Faktor (48) versehen, erhalten bleibt. Man zeigt das allgemein durch Zugrundelegung eines Signals der umfassenderen Form:

1) Vgl. L 26, Formel (33)!

$$(50) \quad P(0, t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{i \alpha_n t} & ; \quad t > 0; \end{cases}$$

der Fall, daß auch Glieder der Form $t^k e^{i \alpha_n t}$ in (50) enthalten sind, erfordert nach (34) keine besondere Behandlung. Man erhält mit

$$\frac{1}{\omega - \alpha_n} = \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\omega} \right)^j$$

und

$$(51) \quad \begin{cases} e^{i(\omega t - kx)} = e^{-b_1 t_0} e^{i \omega t} \left\{ 1 + \frac{e_1}{\omega} + \frac{e_2}{\omega^2} \dots \right\} : \\ P(x, t) = e^{-b_1 t_0} \left\{ \sum_n p_n + i t \cdot \sum_n p_n (e_1 + \alpha_n) \right. \\ \left. - \frac{t^2}{2!} \sum_n p_n (e_2 + e_1 \alpha_n + \alpha_n^2) \dots \right\} ; \quad t > 0. \end{cases}$$

Nun ist in (51):

$$s_0 = \sum_n p_n \text{ der Sprung von } P \text{ bei } t = 0;$$

$$s_1 = i \sum_n p_n \cdot \alpha_n \text{ der von } \frac{dP}{dt} \dots \text{ usw.},$$

also:

$$(52) \quad P(x, t) = e^{-b_1 t_0} \left\{ s_0 + (s_1 + i e_1 s_0) t + \frac{s_2 + i e_1 s_1 - e_2 s_0}{2!} t^2 \dots \right\}.$$

(52) setzt die verzerrungsfreie Fortpflanzung des Signalkopfes in Evidenz. Diese erklärt sich physikalisch daraus, daß sich wegen der Dispersionsfreiheit von $k(\omega)$ bei $\omega \rightarrow \infty$ [nach (41), (42)] die sehr hohen Frequenzen mit Kopfgeschwindigkeit fort-pflanzen; und diese allein sind maßgeblich für die Form des Signalkopfes: die ihn charakterisierende Unstetigkeit bei $t = 0$ hängt, wie man einerseits aus (32) bis (35), andererseits aus (43) bis (52) erkennt, allein von der Zahl ν ab, der Ordnung der Frequenz ∞ im Signalspektrum. Mathematisch trägt man hier dem Einfluß der sehr hohen Frequenzen durch die Führung des Integrationsweges in großer Entfernung Rechnung.

Ohne Verzerrung wird aber nur der Signalkopf selbst, d. h. der Einsatz bei $t = 0$ übertragen; die nachfolgenden Teile weichen immer mehr vom Signalverlauf bei $x = 0$ ab, wie

z. B. (52) zeigt. Für diesen sich unmittelbar an $t = 0$ anschließenden, mit verschwindender Verzerrung beginnenden Zeitabschnitt, der als „Vorlauf“ bezeichnet sei, läßt das als Potenzentwicklung erscheinende Integrationsergebnis — das übrigens einer Verallgemeinerung der Potenzentwicklung der Heaviside-Carson'schen Operatorenungleichung¹⁾ entspricht — in den Formen (44) und (46), (47) alles Charakteristische erkennen: Die in x und t gleichmäßige Konvergenz wird praktisch mit wachsendem x und t immer schlechter, worin die zunehmende Abweichung vom ursprünglichen Signalverlauf, dessen Kopf ja das erste Glied der Vorlaufentwicklung ist, zum Ausdruck kommt. Der wachsende Einfluß der späteren Glieder bedeutet physikalisch den immer kleineren Frequenzen des Signalspektrums, bei denen sich die Dispersion immer stärker bemerkbar macht; die Tatsache, daß die Entwicklung wegen schlechter Konvergenz bald unbrauchbar wird, bedeutet den vollkommenen Verlust der Ähnlichkeit mit dem ursprünglichen Signal und damit das Ende des Vorlaufs. Dieses tritt, was die Signalart betrifft, nach (44) um so eher ein, je kleiner ν ist; den Haupteinfluß hat indessen mittels der Koeffizienten c_x (44) das Medium: diese wachsen mit der Eindringtiefe x und der Veränderlichkeit von $\frac{k(\omega)}{\omega}$, d. h. der Stärke der Dispersion bei hohen Frequenzen. Das zeigt noch deutlicher die Form (46), (47), wenn man die Definition (45) der dort eingehenden Größe ξ beachtet. Zugleich erkennt man aus (46), (47) den allgemeinen Charakter des nunmehr von der Form des speziellen Signals immer weniger beeinflussten Vorlaufs: nach dem bekannten Verhalten der mit Potenzfaktoren versehenen Bessel'schen Funktionen sind es Oszillationen wachsender Periode und Amplitude, die bei größerer Eindringtiefe anfangs sehr klein gegen die entsprechenden Größen der stationären Signalfrequenz sind und — abgesehen von dem bezeichnenderweise zu α proportionalen Amplitudenfaktor — nur vom System und der Tiefe x abhängen. Im einzelnen sei hierzu auf Sommerfeld L 26, S. 202, speziell Fig. 9 verwiesen, wo der Vorlauf des sin-Signals (47) genauer beschrieben ist. Als Ende

1) Vgl. L 3, S. 21.

des Vorlaufs ist hier etwa die Zeit anzusehen, von der ab die asymptotische Darstellung der eingehenden Besselschen Funktionen zweckmäßig ist, was mit der später gegebenen allgemeineren Definition der Aufzeit (s. u. § 13) in Einklang steht.

§ 7. Prinzipielles über die zu verwendende Integrationsmethode

Für das Folgende ist die Voraussetzung wesentlich, daß die Eindringtiefe x groß ist, so daß asymptotische Rechnungen angemessen sind (vgl. § 5); quantitativ wird diese Bedingung in § 13 formuliert. Nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen bedeutet das einen kurzen Vorlauf; der folgende Teil des Signalverlaufs, der „Ablauf“, ist dann die weit überwiegende Hauptepoche. Ferner wird im folgenden Verlustfreiheit vorausgesetzt.

Zunächst erhebt sich die prinzipielle Frage nach der hier angemessenen Berechnungsmethode für das Grundintegral (29). Bei Integralen solcher Art kann man zunächst an verschiedene Behandlungsweisen denken: I. Entwicklung des Integranden in eine in genügender Entfernung absolut konvergente Reihe nach fallenden Potenzen und gliedweise Integration; diese wurde in § 6 beim Vorlauf benutzt und ist, wie dort gezeigt, hier nicht zu empfehlen. II. Zusammenziehung des Integrationsweges und Zerlegung des Integrals in einzelne Residuenintegrale und solche, die um die Verzweigungsschnitte herumlaufen¹⁾; dies entspräche einer Verallgemeinerung der nur für eindeutige Funktionen ausreichenden Heavisideschen Entwicklungsformel (vgl. Fußnote S. 314); auch diese Methode, — die sich bei kurzen Distanzen x als geeignet erweisen wird —, ist hier unbrauchbar, wie folgende einfache Überlegung lehrt: Ein Residuenintegral um a ergibt einen stationären Zustand (30), also, da das Gesamtintegral den Einschwingvorgang darstellt, die Integrale um die Verzweigungsschnitte schließlich verklingende „Eigenschwingungen“; da, wie am deutlichsten (46) zeigt, im Ablauf anfangs sehr rasche Oszillationen kleiner

1) So geht z. B. in einem mathematisch ähnlichen Fall Sommerfeld in L 27, 28 vor; vgl. aber hierzu die Kritik und Methode von Weyl (L 41), die der hier gewählten entspricht!

Amplitude stattfinden, würde die genannte Zerlegung eine Berechnung als Differenz großer Größen mit rasch wechselnden Phasen bedeuten. — Die beiden eben betrachteten mathematischen Methoden sind offenbar dem hier darzustellenden physikalischen Vorgang nicht adäquat. Nicht so III., die Methode der (eventuell verallgemeinerten) Sattelpunktsintegration (vgl. L 8; L 7, S. 435; die Kenntnis der Sattelpunktmethode wird im folgenden vorausgesetzt); denn diese stützt sich gerade auf die rasche Veränderlichkeit der Exponentenfunktion in (29), also große Eindringtiefe und Dispersion. Sie führt auf asymptotische semikonvergente Entwicklungen im Sinne Poincarés, wird also bereits durch (46), (47) nahegelegt. Ihr würde die asymptotische Entwicklung der Operatorengleichung entsprechen, doch dürfte es kaum möglich sein, in so allgemeinen Fällen wie hier mit Hilfe der Heaviside-Carsonschen Methoden wirklich zu ihr zu gelangen¹⁾; an diesem Punkt zeigt sich deutlich die methodische Überlegenheit der funktionentheoretischen Behandlung, die diese Entwicklung ganz von selbst liefert.

§ 8. Gruppengeschwindigkeit und „Signalfrequenzen“; Berechnung der Einzelterme

Die Aufgabe des Folgenden ist es, das Grundintegral § 2; (29) bei — im Rahmen der allgemeinen Sätze von § 4 — beliebigem $k(\omega)$ mittels Sattelpunktsintegration auszuwerten, also zu einem Ergebnis zu gelangen, das den Allgemeingrad der Vorlaufentwicklung besitzt. Hierzu gehen wir von der erst im folgenden Paragraphen bewiesenen Tatsache aus, daß sich der ursprüngliche Integrationsweg stets in einen „Sattelpunktsweg“ deformieren läßt, der aus einer Anzahl über Sattelpunkte führender Falllinien der Exponentialfunktion von (29) besteht. Das Gesamtintegral setzt sich dann aus einzelnen Sattelpunktsintegralen: J_{Sa} zusammen, die kurz mit dem Symbol

$$(53) \quad \int_{(Sa)} \dots d\omega$$

1) Vgl. L 3, Abschnitt V; speziell S. 76!

bezeichnet werden sollen. Wir werten nun ein solches J_{sa} aus wobei vorläufig nur dessen ungefähre Wert interessieren soll. Die Lage der Sattelpunkte ω_s der Exponentenfunktion in (29) zur Zeit T , ist durch das Verschwinden ihrer ersten Ableitung bestimmt:

$$(54) \quad k'(\omega_s) \equiv k'_s = T,$$

was mit der Aussage identisch ist: $\frac{1}{T}$ ist die Gruppengeschwindigkeit von ω_s .¹⁾ Die Auswertung soll in der abgekürzten Form wie z. B. bei Brillouin (L 1) oder Sommerfeld (L 29, S. 458) vorgenommen werden: Man entwickelt in der Umgebung von ω_s :

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = k_s + k'_s \eta + \frac{k''_s}{2!} \eta^2 + \frac{k'''_s}{3!} \eta^3 + \dots; \quad k_s^{(v)} \equiv k^{(v)}(\omega_s), \\ \eta = \omega - \omega_s, \end{array} \right.$$

ebenso

$$(56) \quad F(\omega) = F_s + F'_s \eta + \frac{F''_s}{2!} \eta^2 + \dots; \quad F_s^{(v)} \equiv F^{(v)}(\omega_s)$$

und erhält einen Integranden mit einer von niedrigster Ordnung quadratischen Exponentenfunktion:

$$(57) \quad J_{sa} = \frac{F_s e^{i\varphi_s}}{2\pi i} \int_{sa} \left\{ 1 + \frac{F'_s}{F_s} \eta + \frac{F''_s}{2! F_s} \eta^2 \dots \right\} \cdot e^{-i\pi \left\{ \frac{k''_s}{2!} \eta^2 + \frac{k'''_s}{3!} \eta^3 \dots \right\}} d\eta; \quad \varphi_s \equiv \omega_s t - k_s x = x(\omega_s T - k_s).$$

Sind nun der Faktor

$$e^{i \left[(\omega t - kx) - \varphi_s - \frac{k''_s}{2!} \eta^2 \right]} = e^{-i\pi \left[\frac{k''_s}{3!} \eta^3 \dots \right]}$$

und die Beifunktion $F(\omega)$ in einer gewissen Umgebung von $\eta = 0$ „langsam veränderlich“ gegenüber $e^{-i\pi \frac{k''_s}{2!} \eta^2}$, d. h. — diese oberflächliche Betrachtung wird später präzisiert! — ist für $|\eta| \leq \eta_0$ der Wert dieser Funktionen nicht sehr verschieden von dem bei $\eta = 0$, wobei η_0 etwa durch die Forderung:

$$(58) \quad e^{-\frac{|k''_s|}{2!} \eta_0^2} \text{ genügend } \ll 1$$

1) Vgl. hierzu Brillouin L 1!

gekennzeichnet ist, so bedeutet das, daß der Beitrag des Falllinienweges außerhalb $|\eta| = \eta_0$ zu vernachlässigen ist, und innerhalb die Falllinie durch ihre Tangente approximiert werden kann. Diese Voraussetzungen sind bei genügend großem x , wie später gezeigt wird, im allgemeinen erfüllt. Da die Gefällerrichtung

$$(59) \quad \zeta_s = -\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_s}{2} \bmod \pi; \quad \gamma_s = \arg(k_s'')$$

ist, erhält man dann aus (57) durch Zusammenfassung von $e^{-i \frac{k_s'' x}{3!} - \eta^3 \dots}$ mit $F(\eta)$ zu $G(\eta)$, wobei $G_s = F_s$ ist, mit $\eta = e^{i\zeta_s} \cdot s$; $\eta_0 = s_0$:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{Sa} &\approx \frac{F_s e^{i(\varphi_s + \zeta_s)}}{2\pi i} \int_{-s_0}^{+s_0} \left\{ 1 + \frac{G_s'}{G_s} e^{i\zeta_s} + \frac{G_s''}{2! G_s} e^{2i\zeta_s} s^2 \dots \right\} \\ &\quad \cdot e^{-\frac{|k_s''| x}{2!} s^2} ds. \end{aligned} \right.$$

Das ergibt wegen

$$(61) \quad \int_{-s}^{+s} s^{2n+1} e^{-\lambda s^2} ds = 0$$

bei Ausdehnung der Grenzen nach $\pm \infty$, was mit einem prozentualen Fehler von der Ordnung

$$(62) \quad \frac{G(s_0)}{G_s} \cdot \frac{e^{-\frac{|k_s''| x}{2!} s_0^2}}{s_0 \sqrt{\frac{|k_s''| x}{2!}}}$$

verbunden ist:

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{Sa} &\approx \frac{F_s e^{i(\varphi_s + \zeta_s)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 + \frac{G_s''}{2! G_s} e^{2i\zeta_s} s^2 + \frac{G_s^{(IV)}}{G_s} e^{4i\zeta_s} s^4 \dots \right\} \\ &\quad \cdot e^{-\frac{|k_s''| x}{2!} s^2} ds, \end{aligned} \right.$$

also mit

$$(64) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n} e^{-\lambda s^2} ds = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2\lambda)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}:$$

$$(65) \quad \left\{ J_{Sa} \approx \frac{F_s e^{i(\varphi_s + \xi_s - \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2\pi} |k_s''| x} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{G_s''}{2! G_s} \frac{e^{2i\xi_s}}{|k_s''| x} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{G_s^{(IV)}}{4! G_s} \frac{e^{4i\xi_s}}{\left(\frac{|k_s''| x}{2!}\right)^2} \dots \right\} \right\}$$

Das ist eine im Poincaréschen Sinne asymptotische semi-konvergente alternierende Entwicklung für genügend große $|k_s''|x$, also den gerade interessierenden Fall größerer Tiefe und Dispersion. Nach bekannten Methoden¹⁾ kann man ihren Fehler in Abhängigkeit von $|k_s''|x$ abschätzen; wir kommen später hierauf zurück. Wenn nur das Charakteristische des Ergebnisses, nicht die erreichbare Genauigkeit interessiert, kann man sich auf das Hauptglied von (65) beschränken, da bekanntlich die ersten Glieder solcher Entwicklungen in dem Gebiet, wo sie überhaupt anwendbar sind, relativ stark abnehmen (vgl. Jahnke-Emde und ¹⁾). Man erhält so speziell für ein Einsatzsignal:

$$(66) \quad J_{Sa} \sim \frac{e^{i\left[\omega_s t - k_s x + \xi_s - \frac{\pi}{2}\right]}}{(\omega_s - \alpha) \sqrt{2\pi} |k_s''| x}.$$

Ein Term (65) bzw. (66) stellt nun mit einer mit zunehmendem $|k_s''|x$ immer besseren Annäherung einen Schwingungszustand der (allgemein komplexen) Frequenz ω_s dar, und zwar einen in dem betrachteten Kontinuum zu ω_s gehörigen „Wellenzug“: $e^{i(\omega_s t - k_s x)}$, dessen Amplitude gerade die ist, mit der ω_s im ursprünglichen Signalspektrum enthalten ist, versehen mit dem Faktor:

$$(67) \quad \sqrt{\frac{2\pi}{|k_s''| x}}.$$

Physikalisch bedeutet dieser, da der prozentuale Fehlerbetrag von (66) mit $\frac{1}{\sqrt{|k_s''| x}}$ abnimmt, also die Ankunft der Partialwelle auf eine mit $\sqrt{|k_s''| x}$ wachsende Zeit verteilt wird, daß alle Partialfrequenzen ω_s mit reeller Gruppengeschwindigkeit

1) Vgl. z. B. L 24, S. 50; L 7, S. 431 ff.; L 8, Literaturhinweis S. 543.

im ganzen vollständig übertragen werden; wir bezeichnen sie daher als „Signalfrequenzen“. Hiernach ist es sinnvoll,

$$(54a) \quad t_s = k'_s \cdot x$$

als „Signalzeit von ω_s “ bzw. die Gruppengeschwindigkeit

$$(54b) \quad \frac{1}{k'_s} = \frac{x}{t} = \frac{1}{T}$$

als „Signalgeschwindigkeit von ω_s “ zu bezeichnen.

Nun kommen in jedem Augenblick so viele Signalfrequenzen bei x an, als Gl. (54) Wurzeln hat. Fundamental für die Beschreibung des Signalablaufs wird also die Wanderung der Sattelpunkte ω_s im Laufe von T sein; diese soll daher jetzt untersucht werden.

§ 9. Allgemeine Diskussion der Sattelpunktsbahnen als Bild des Signalablaufs. Bedeutung des einzelnen D-Gebietes; die „Quasilatenzzeit“

Die Grundlage bilden hierbei die allgemeinen Dispersionsätze von § 4, insbesondere Satz II. — Gl. (54) kann man nach (4), (23) in der Form schreiben:

$$\frac{Z}{N} \left\{ \frac{Z'}{Z} - \frac{N'}{N} \right\}^2 = 4 T^2.$$

Danach gibt es, wenn mit $2r$ der Grad von $N(\omega)$ bezeichnet wird, zu jeder Zeit T

$$(68) \quad s = 2(4r + 1)$$

Sattelpunkte, die nach § 3 symmetrisch zur Imaginärachse und reell oder konjugiert imaginär liegen müssen. Wir verfolgen ihre Wanderung rückwärts, d. h. von $T = \infty$ aus. Bei großem T laufen nach (54) alle ω_s in die $2r$ Stellen ω_N und $(2r + 2)$ Stellen ω_z ein, und zwar in folgender Weise: In der Nähe einer Stelle ω_N der rechten Halbebene ist $k(\omega)$ nach Satz III von § 4 von der Form:

$$(69a) \quad k = \frac{2k_N}{\sqrt{\omega_N - \omega}},$$

in der Nähe von ω_z :

$$(69b) \quad k = 2k_z \sqrt{\omega - \omega_z},$$

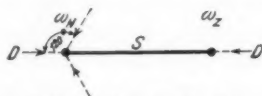
wobei k_N und k_s reell und positiv sind; also ergibt (54) als Lage der Sattelpunkte für sehr große T :

$$(70a) \quad \omega_N - \omega_s = \left(\frac{k_N}{T} \right)^{2/3}$$

bzw.

$$(70b) \quad \omega_s - \omega_z = \left(\frac{k_z}{T} \right)^2.$$

In eine Stelle ω_N laufen also für $T \rightarrow \infty$ drei Sattelpunkte ein, nach ω_z einer, in der in Fig. 9 dargestellten Anordnung;



Einlauf der Sattelpunkte in die Grenzfrequenzen

Fig. 9

das ergibt die richtige Summe (68). Die unter $\pm \frac{\pi}{3}$ nach ω_N laufenden Sattelpunkte, die als „Nebenpunkte“ bezeichnet seien, sind hier ohne Interesse, da, wie sogleich gezeigt wird, der Integrationsweg allein über die auf der reellen Achse laufenden „Hauptpunkte“ geführt wird.

Für deren Wanderung spielt nun eine Stelle ω_m :

$$(71) \quad k''(\omega_m) \equiv k_m'' = 0; \quad k_m''' > 0$$

als einzige Extremalstelle von k' in einem D-Gebiet (nach Satz II von § 4 bzw. Figg. 6–8) eine besondere Rolle. In ihrer Umgebung gilt:

$$k'(\omega_s) = T = T_m + \frac{k_m'''}{2!} (\omega_s - \omega_m)^2 \dots \quad \text{mit} \quad T_m = k'(\omega_m),$$

also

$$(72) \quad \omega_s - \omega_m \approx \sqrt{\frac{2(T - T_m)}{k_m'''}} ,$$

sowie

$$(73) \quad k_s'' \approx (\omega_s - \omega_m) \cdot k_m''' \approx \sqrt{2k_m'''(T - T_m)}.$$

Daraus folgt, daß sich die beiden zu einem D-Gebiet gehörigen Hauptsattelpunkte bei $T < T_m$ unterhalb und oberhalb der reellen Achse befinden, sich zur Zeit T_m bei ω_m zu

einem Tripelpunkt vereinigen und für $T > T_m$ längs der reellen Achse nach ω_z und ω_N hin auseinanderwandern; danach kommen zufolge § 8 alle Frequenzen eines D-Gebietes in jeder Tiefe x sukzessive an. Aus (73) folgt, daß die in (59) berechneten Gefällerrichtungen $\zeta_s \bmod \pi$ folgende Werte haben:

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bei } T < T_m: \zeta_s = 0 \text{ für den unteren,} \\ \quad \quad \quad \zeta_s = \frac{\pi}{2} \text{ für den oberen Sattelpunkt,} \\ \text{bei } T > T_m: \zeta_s = +\frac{\pi}{4} \text{ für den linken,} \\ \quad \quad \quad \zeta_s = -\frac{\pi}{4} \text{ für den rechten Sattelpunkt.} \end{array} \right.$$



Wanderung der Hauptsattelpunkte eines D-Gebietes

Fig. 10

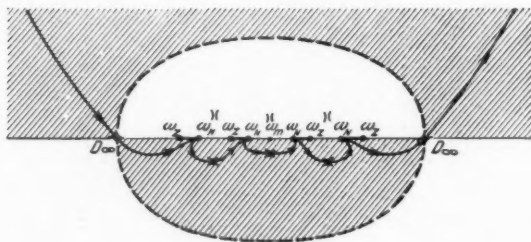
Ferner ist nach (72) der Betrag der zu ω_s gehörenden Welle $e^{i\varphi_s}$ [(57); (65)] bei $T > T_m$ gleich 1, bei $T < T_m$:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} |e^{i\varphi_s}| = |e^{i(\varphi_s - \varphi_m)}| = |e^{ix[(\omega_s - \omega_m)T - (k_s - k_m)]}| \\ \approx |e^{ix(T - T_m)(\omega_s - \omega_m)}| \approx e^{\pm x} \sqrt{\frac{2(T_m - T)^2}{k_m''''}}; \\ e^{i\varphi_s} \approx \begin{cases} e^{-x} \sqrt{\frac{2(T_m - T)^2}{k_m''''}} & \text{für den unteren Sattelpunkt,} \\ e^{+x} \sqrt{\frac{2(T_m - T)^2}{k_m''''}} & \text{für den oberen Sattelpunkt.} \end{cases} \end{array} \right.$$

In Fig. 10 sind der Weg der Hauptsattelpunkte eines D-Gebietes sowie ihre Gefällerrichtungen bzw. der Integrationsweg angedeutet.

Wir können nunmehr die dem § 8 zugrunde liegende Tatsache beweisen, daß es stets möglich ist, den ursprünglichen Integrationsweg von (29) in einen Sattelpunktsweg zu deformieren, und dessen allgemeinen Verlauf angeben: Die Gefällekurven über die Sattelpunkte münden ja beiderseits

in die wesentlich singulären Stellen des Integranden in solcher Richtung ein, daß der Realteil der Exponentenfunktion negativ ∞ wird; Endpunkte von Fallinien sind also die Stellen ω_N und $\omega = \infty$, und zwar bei jenen nach § 3 im oberen Blatt der Winkelraum unterhalb, im unteren Blatt oberhalb der reellen Achse, bei dieser nach § 6 für Zeiten $T > \frac{1}{v_k}$ im oberen Blatt der Winkelraum der oberen Halbebene. Andererseits ist über die Gebiete, wo die Exponentenfunktion negativen Realteil hat, folgendes bekannt: Bei $T < \frac{1}{v_k}$ hat die ganze untere Halb-



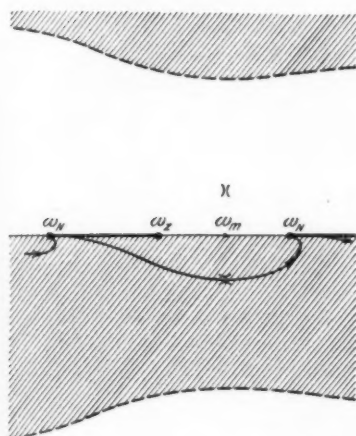
Relief der ω -Ebene für $\frac{1}{v_k} < T < T_{mmin}$

Fig. 11

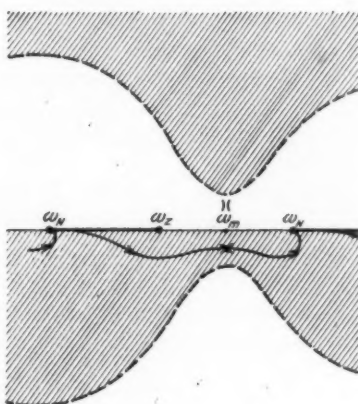
ebene diese Eigenschaft, bei $T > \frac{1}{v_k}$ nicht mehr deren entfernte Teile, dafür die der oberen Halbebene; die Begrenzungs-
linien dieser Gebiete rücken dann mit zunehmendem T von oben und unten gegen die reelle Achse und von rechts und links außerhalb $|\omega_z|_{max}$ nach innen vor. Sie schneiden die reelle Achse zunächst nur in den beiden nach (42) u. (54) zu jeder Zeit $T > \frac{1}{v_k}$ vorhandenen Sattelpunkten des D_∞ -Gebietes, dann zur kleinsten Zeit T_m von allen D-Gebieten zum erstenmal in den betreffenden Punkten $\pm \omega_m$ und später in den 4 Sattelpunkten dieser beiden spiegelbildlichen D-Gebiete; so sukzessive in allen D-Paaren!

Auf Grund dieser Kenntnisse ist man in der Lage, den Verlauf dieser Grenzlinien und der Gefällekurven in Abhängig-

keit von der hierfür allein maßgeblichen Größe T (vgl. L 1, S. 31) qualitativ anzugeben. Das ist in Fig. 11 beispielsweise für die gesamte ω -Ebene, in Figg. 12–16 für ein D-Gebiet in dessen Hauptphasen zu sehen; in den schraffierten Gebieten ist der Realteil des Exponenten negativ. Das Verhalten bei ω_m , das Fig. 14 zeigt, wird später bestätigt. Die Figuren sind nur qualitativ zu werten, vermitteln jedoch wegen der Lage der Grenzfrequenzen und der Sattelpunkte als Funktion von T sowie deren Eigenschaft, Kreuzungspunkte von ausgezeich-



Ausschnitt der ω -Ebene für $T \ll T_m$
Fig. 12

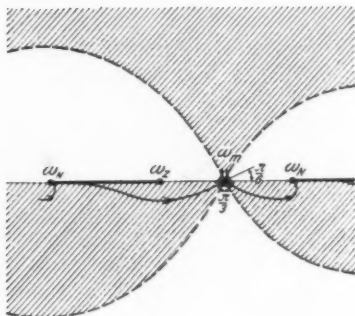


Ausschnitt der ω -Ebene für $T < T_m$
Fig. 13

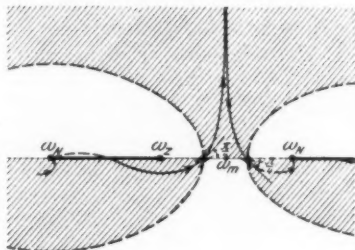
neten Falllinienpaaren zu sein, die als Grenzen gewisser Gebiete für alle anderen Falllinien unüberschreitbar sind, die entscheidende Kenntnis, daß der gezeichnete Sattelpunktsweg die an ihn zu knüpfenden Bedingungen erfüllt: Er ist zu allen Zeiten zusammenhängend, läuft nur durch schraffierte Gebiete und ist aus dem ursprünglichen Integrationsweg durch stetige Deformationen herstellbar — evtl. unter Berücksichtigung eines Residuums bei $\omega = \alpha$; von diesem soll erst später die Rede sein.

Diese Ergebnisse geben im Verein mit denen des vorangehenden Paragraphen Aufschluß über den Signalablauf in genügend großer Tiefe x : Zunächst tragen als Fortsetzung des

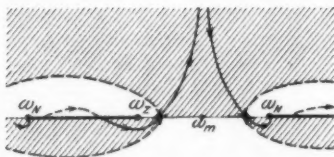
Vorläufs nur die beiden Sattelpunkte des D_∞ -Gebiets zu P bei¹⁾, da alle anderen in schraffierten Gebieten liegen, also nur verschwindende Beiträge liefern; es kommen also, wie § 6 ergab, zunächst die hohen Frequenzen: $|\omega| > |\omega_{z\max}|$ an, deren Periode entsprechend der Wanderung der D_∞ -Sattelpunkte



Ausschnitt der ω -Ebene für $T = T_m$
Fig. 14



Ausschnitt der ω -Ebene für $T > T_m$
Fig. 15



Ausschnitt der ω -Ebene für $T \gg T_m$
Fig. 16

und deren Amplitude entsprechend dem Faktor F_s in (65) mit T zunimmt. Der Beitrag P_μ irgendeines anderen D -Gebiets: D_μ macht sich erst in einem Zeitintervall um dessen Zeit $T_{m\mu}$ herum bemerkbar: Merklich vorher ist er nach (65), (66), (75) ein mit x exponentiell verschwindender, mit t exponentiell ansteigender Term, merklich nachher sind es 2 mit den be-

1) Das entspricht der asymptotischen Darstellung der in (46), (47), auftretenden Besselschen Funktionen nach Debye (L 8).

treffenden Frequenzen ω_s oszillierende Terme; wir bezeichnen daher sinngemäß $T_{m\mu}$ als „Quasilatenzzeit von D_μ “. — Zur Darstellung des Vorgangs in einem gewissen Zeitintervall um $T_{m\mu}$, dem „Quasilatenzübergang von T_μ “, der den Übergang zwischen dem aperiodischen und oszillierenden Zustand von P_μ vermittelt, ist eine Darstellung der Form (65) sicher unbrauchbar, da diese genügend großes $\sqrt{|k_s''|}x$ zur Voraussetzung hat, aber $k_m'' = 0$ ist. — Wegen des Amplitudenfaktors $\frac{1}{\sqrt{|k_s''|}}$ nehmen dann mit wachsendem T die oszillierenden Terme schließlich wieder zu 0 ab entsprechend der Wanderung der Sattelpunkte nach den Grenzfrequenzen. Der geschilderte Vorgang spielt sich in allen D-Gebieten, natürlich quantitativ und zeitlich verschieden, ab. Zusammengekommen erfolgt in dieser Weise der Ablauf eines Signals ohne Hauptfrequenz (§ 5).

Hierzu ist noch der Nachweis zu erbringen, daß tatsächlich alle Quasilatenzzeiten größer sind als die Latenzzeit:

$$(76) \quad t_{m\mu} > t_0 \text{ bzw. } T_{m\mu} > \frac{1}{v_k} \text{ (§ 6) für alle } \mu = 1, 2, \dots, r.$$

Dies läßt sich direkt aus der bekannten Anordnung der Stellen ω_g beweisen; indem man dieselben nach § 6 von D_∞ aus numeriert, schreibt man nach (25b), (26b):

$$R(\omega) = \frac{\prod_{\kappa=1}^{r+1} (\omega^2 - \omega_{s\kappa}^2)}{\prod_{\kappa=1}^r (\omega^2 - \omega_{N\kappa}^2)}.$$

Wir zeigen für ein beliebiges D_μ : $T_{m\mu} > \frac{1}{v_k}$. Hierzu ordnen wir um:

$$\begin{aligned}
 R(\omega) &= \left(\frac{\omega}{v_k}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{s\mu}}{\omega}\right)^2\right] \prod_{\kappa=1}^{\mu-1} \left(\frac{\omega_{s\kappa}}{\omega_{N\kappa}}\right)^2 \\
 &\quad \cdot \prod_{\kappa=1}^{\mu-1} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{s\kappa}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{N\kappa}}\right)^2} \cdot \prod_{\kappa=\mu}^r \frac{1 - \left(\frac{\omega_{s(\kappa+1)}}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_{N\kappa}}{\omega}\right)^2} \quad [\text{vgl. (42)}] \\
 &= \left(\frac{\omega}{v_k}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{s\mu}}{\omega}\right)^2\right] \cdot C_\mu^2 \cdot \Pi_{1\mu}(\omega^2) \cdot \Pi_{2\mu}(\omega^2).
 \end{aligned}$$

Hierbei ist: $C_\mu^2 > 1$ sowie in D_μ , d. h. für

$$\omega_{N_\mu}^2 > \omega^2 > \omega_{z(\mu+1)}^2:$$

$$\Pi_{1\mu}(\omega^2) > 1; \Pi_{2\mu}(\omega^2) > 1; \frac{d}{d\omega^2} \Pi_{1\mu}(\omega^2) > 0; \frac{d}{d\omega^2} \Pi_{2\mu}(\omega^2) > 0,$$

wie eine elementare Rechnung zeigt. Man kann also schreiben:

$$k(\omega) = \sqrt{R(\omega)} = \frac{\omega}{v_k} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2} \cdot F_\mu(\omega^2),$$

wobei in D_μ : $F_\mu(\omega^2) > 1$; $\frac{dF_\mu}{d\omega^2} > 0$. Daher ist:

$$\begin{aligned} v_k \cdot k'(\omega) &= F_\mu \cdot \frac{d}{d\omega} (\sqrt{\omega^2 - \omega_{z\mu}^2}) + \frac{dF_\mu}{d\omega^2} \cdot 2\omega^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2} \\ &> \frac{d}{d\omega} (\sqrt{\omega^2 - \omega_{z\mu}^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2}} > 1 \end{aligned}$$

für alle ω in D_μ , also auch $\omega_{m\mu}$, q. e. d.

§ 10. Fortpflanzung von Signalen mit Hauptfrequenz;
Signalzeit. „Hauptübergang (Aufschaukelzeit)“ und
„Quasilatenzübergang“.

Versagen der abgekürzten Sattelpunktsintegration

Der Ablauf eines Signals mit Hauptfrequenz α verhält sich von einer gewissen Zeit an wesentlich anders als der im vorigen Paragraphen besprochene: Wegen des Faktors $\frac{1}{\omega_s - \alpha}$ wird hier der Beitrag des D_α -Gebietes bald nach dessen Quasilatenzeit alle anderen Terme überwiegen und in dem Maße, wie sich ein Sattelpunkt der Stelle α nähert, stark anwachsen; er sei daher als Hauptterm P_h bezeichnet. Die Darstellung (65), (66) muß in einem Gebiet um

$$(77) \quad T = T_\alpha = k'_\alpha$$

herum versagen, da dann ω_s nahe α liegt, also die Beifunktion in (29) nicht mehr langsam veränderlich gegen die Exponentialfunktion ist [vgl. § 8]. Später, wenn T merkl. $> T_\alpha$, also (66) wieder anwendbar ist, liefert das Sattelpunktsintegral einen mit T abnehmenden flüchtigen Term; außerdem ist aber, da der Integrationsweg über den Pol α hinweggewandert ist, dessen Residuum zu berücksichtigen, welches nach (29), (30) den stationären Zustand P_α ergibt:

$$(78) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\alpha)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega - \alpha} d\omega = P_\alpha = e^{i[\alpha t - k(\alpha)x]},$$

dessen Amplitude wegen der Verlustfreiheit $|P_a| = |P_0| = 1$ ist. Die flüchtigen Bestandteile sind von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{|k_s''|x}}$; während also merklich vor $T = T_a$ das Signal dem Betrage nach etwa

$$(79a) \quad |P| \sim \sum_{(\omega_s)} \frac{1}{(\omega_s - \alpha) \sqrt{2\pi |k_s''|x}}$$

war, ist es nachher:

$$(79b) \quad P = P_a + \text{Zusatzglieder v. d. Ordnung } \frac{1}{(\omega_s - \alpha) \sqrt{2\pi |k_s''|x}}.$$

Hiernach wird man sinnvoll unter T_a bzw. t_a (77) die Signalzeit bzw. unter $\frac{1}{T_a}$ die Signalgeschwindigkeit von α verstehen; eine einfache Überlegung, die hier übergangen wird, da sie unten allgemeiner durchgeführt wird, lehrt, daß zur Signalzeit gerade: $P \approx P_h = \frac{1}{2} P_a$ ist.

Ein großer Mangel der bisherigen Rechnung liegt darin, daß sie gerade im „Hauptübergang“, wo eine relativ rasche Aufschaukelung der Signalamplitude stattfindet, versagt, ebenso beim Quasilatenzübergang; denn außer der Quasilatenzeit des D_a -Gebietes und der Signalzeit selbst ist gerade die Ausdehnung der Übergangsabschnitte für den Signalablauf charakteristisch. Trotzdem hier die zu (65) führende Rechnung nicht anwendbar ist, ist man doch schon in der Lage, hierüber größenordnungsmäßige Angaben zu machen: In § 8, speziell (58) war die langsame Veränderlichkeit von $F(\eta) = \frac{1}{\eta - \eta_a}$ ($\eta_a = \alpha - \omega_s$)

gegenüber $e^{-i \frac{k_s'' x}{2!} \eta^2}$ vorausgesetzt, also, da $|\eta_a|$ der Konvergenzradius der Potenzentwicklung von $F(\eta)$ ist,

$$e^{-\frac{|k_s''|x}{2!} |\eta_a|^2} \text{ genügend } \ll 1.$$

Das Hauptübergangsgebiet ist also dadurch bestimmt, daß diese Bedingung dort nicht erfüllt ist, d. h. $|\eta_a| \sqrt{\frac{|k_s''|x}{2}}$ unter einer gewissen Schranke liegt. Da dann $|\eta_a|$ klein ist, gilt:

$$k_s'' \approx k_a''; \quad k_s' - k_a'' = T - T_a \approx k_a''(\omega_s - \alpha) = -k_a'' \eta_a,$$

also:

$$(80) \quad |\eta_a| \sqrt{\frac{|k_a''| x}{2}} \approx \frac{1}{2} \frac{t - t_a}{\sqrt{\frac{|k_a''| x}{2!}}} \equiv \frac{x_a}{2}.$$

Im Hauptübergang muß daher sein:

$$(81a) \quad |x_a| \leq x_a^{(0)}; e - \left[\frac{x_a^{(0)}}{2} \right]^2 \text{ genügend } < 1,$$

worin $x_a^{(0)}$ eine nach (81a) geeignet zu wählende Zahl ist; seine Ausdehnung t_h , die „Aufschaukelzeit“, wird also:

$$(81b) \quad t_h = 2 x_a^{(0)} \sqrt{\frac{|k_a''| x}{2!}}.$$

Auf Grund einer analogen Überlegung wird der Quasilatenzübergang t_q , zu definieren sein durch:

$$(82) \quad |x_m| \equiv \frac{|t - t_m|}{\sqrt[3]{\frac{|k_m''| x}{3!}}} \leq x_m^{(0)}; t_q = 2 x_m^{(0)} \sqrt[3]{\frac{|k_m''| x}{3!}}.$$

(80)–(82) zeigen die Abhängigkeit der Übergangsabschnitte von Dispersion und Eindringtiefe bis auf die eingehenden Konstanten $x_a^{(0)}$ und $x_m^{(0)}$. Über deren Größe kann vorläufig noch gar nichts ausgesagt werden, doch besteht hier prinzipiell die Möglichkeit numerischer Abschätzung. Dagegen fehlt zunächst eine Darstellung des Verlaufs von P , der zu allen anderen Zeiten durch (65), (66) gut beschrieben wird, gerade in diesen charakteristischen Gebieten vollkommen. Diese Lücke wird die Verallgemeinerung der Sattelpunktmethode ausfüllen.

§ 11. Die verallgemeinerte Sattelpunktsintegrationsmethode¹⁾

Schwierigkeiten, bei denen die Sattelpunktsintegration in der abgekürzten Form (§ 8; dort Literatur) versagte, traten dann ein, wenn ein Sattelpunkt ω_s in Bereiche kam, wo das Glied zweiter Ordnung der Exponentenfunktion eine Nullstelle (Quasilatenzübergang) oder wo die Beifunktion einen Pol hatte (Hauptübergang); eine ähnliche Schwierigkeit, die auch bei den

1) Dieser Paragraph kann für sich gelesen werden.

vorliegenden Fragen auftreten wird, entsteht dann, wenn ω_* in die Nähe von Stellen kommt, wo zwar das Glied zweiter Ordnung nicht klein, aber die folgenden von gleichem Einfluß werden (das ist z. B. der Fall, wenn α nahe einer Stelle ω_* liegt). Im folgenden wird gezeigt, wie man in solchen Fällen, deren Komplikation im Grunde die gleiche, nämlich die nicht mehr genügend rasche Veränderlichkeit des Gliedes zweiter Ordnung gegenüber allen anderen ist, die Sattelpunktsintegration auszuführen hat. Es wird darauf hingewiesen, daß die Resultate dieses und des folgenden Abschnittes zum Teil in spezieller Form schon von Debye (L 8) und Pollaczek (L 20, 22) angegeben wurden.

Die Integrale, für die die Sattelpunktmethode geeignet ist, haben die allgemeine Form:

$$(83) \quad J(x) = \int F(\omega) e^{-ixf(\omega)} d\omega$$

bei genügend großem Parameter x (vgl. § 7, Anfang). Die Sattelpunkte liegen an den durch

$$(84) \quad f'(\omega_*) = 0$$

bestimmten Stellen ω_* . Die Führung von (83) über einen solchen längs der Fallinie ist gleichbedeutend mit der Substitution:

$$(85) \quad -i v^2 = f(\omega) - f(\omega_*) \equiv f^*(\eta; \omega_*); \quad \eta = \omega - \omega_*,$$

wenn man den Weg längs der reellen v -Achse wählt (L 7, L 6, S. 435); dann nimmt (83) mit der Umkehrung $\eta = \eta(v)$ von (85) und der Schreibweise:

$$(86) \quad F[\eta(v)] \frac{d\eta(v)}{dv} = G(v)$$

die Gestalt

$$(87) \quad J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) e^{-xv^2} dv$$

an.

Da der von (83) zu (87) führende Schritt nur eine formale Transformation bedeutet, ist von ihm eine einfachere Ausführung des Integrals, die ja angestrebt wird, gar nicht zu erwarten; zwei Schwierigkeiten liegen hier vor; erstens wird man nur in sehr einfachen Fällen in der Lage sein, die in (85)

implizit definierte Funktion $\eta(v)$ explizit anzugeben und damit (86), (87) wirklich zu bilden, und zweitens, falls selbst diese Möglichkeit besteht, (87) in geschlossener Form auszuwerten. Das letztere ist aber eben mit Rücksicht auf die Größe von x auch gar nicht erforderlich, da man nur einen leicht abschätzbaren (prozentualen) Fehler von der Ordnung:

$$(88a) \quad e^{-x^2}$$

macht, wenn man (87) nur im Gebiet:

$$(88b) \quad |v| \leq v_0 = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

führt:

$$(89) \quad J(x) \approx \int_{-v_0}^{+v_0} G(v) e^{-xv^2} dv.$$

Dann kommen zwei Möglichkeiten, (89) in vereinfachter Weise auszuwerten, in Frage:

a) Man kann eine einfachere Funktion $v^*(\eta)$ angeben, die sich im Gebiet (88b) um weniger als ϵ von $v(\eta)$ unterscheidet und deren Umkehrung $\eta(v^*)$ in geschlossener Form einfach zu bilden ist; dann kann man mit angebbarem Fehler (89) in der Form:

$$(90) \quad J(x) \approx \int_{-v^*}^{+v^*} G(v^*) e_{-x}^{v^{*2}} dv^*$$

wirklich herstellen und, eventuell durch Reihenentwicklung von $G(v^*)$, mittels bekannter Funktionen auswerten; die Ausdehnung der Grenzen nach $\pm \infty$ unter Beibehaltung der Form des Integranden, die zu einem Ergebnis von erheblich einfacherer Gestalt führt, wäre mit einem weiteren, ebenfalls nach bekannten Methoden (vgl. z. B. L 24, S. 50; L 8, S. 543; L 7, S. 431 ff.) abschätzbaren (prozentualen) Fehler von der Ordnung

$$(91) \quad \frac{1}{x^2}$$

verbunden. Diese an anderer Stelle benutzte Methode sei im Gegensatz zu der unter b) folgenden als „vollständige Sattelpunktsintegration“ (V S a) bezeichnet, da bei ihr $\eta(v^*)$ in geschlossener Form benutzt wird.

b) Man entwickelt $v(\eta)$ (85) in der Umgebung von $v = 0$ ($\eta = 0$) in eine Taylorsche Reihe, deren Inverse man bilden kann; das ist diejenige der nicht geschlossen angebbaren Funktion $\eta(v)$. Entwickelt man in gleicher Weise $G[\eta(v)]$, so kann man formal (89) durch gliedweise Integration auswerten — eventuell bei Ausdehnung der Grenzen nach $\pm \infty$ mit einem zusätzlichen Fehler wie bei a) angegeben —. Dieses Verfahren ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Konvergenzradien v_1 und v_2 der Entwicklung von $\eta(v)$ bzw. $G[\eta(v)]$ größer als v_0 (88b) sind:

$$(92) \quad \left. \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} > v_0.$$

Die Bedingung (92) kann man aber in unmittelbarer Form aussprechen. Da nämlich der Integrand nur vom Sattelpunkt aus entwickelt, aber auch nicht teilweise geschlossen umgeformt wurde, ist die Einführung von v überhaupt überflüssig; denn identisch die gleiche Entwicklung wie mittels b) muß man erhalten, wenn man $F(\eta)$ und $f(\eta)$ bzw. $f^*(\eta)$ in der ursprünglichen Variablen ω bzw. η entwickelt und gliedweise in Richtung des stärksten Gefälles des Exponentengliedes 2. Ordnung integriert. Das ist nun gerade das in § 8 durchgeführte Verfahren mit dem Ergebnis (65), das jetzt sinngemäß als „Abgekürzte Sattelpunktsintegration II. Ordnung“ (K Sa II) bezeichnet wird. Die Bedingung (92) verlangt dann folgendes: Es sei wieder eine Größe η_0 definiert, so daß für das Glied 2. Ordnung von (83) gilt:

$$(93) \quad e^{-\frac{|f''_0|}{2!} x \eta_0^2} = e^{-\kappa^2} < \varepsilon; \quad f''_0 \equiv \left(\frac{d^2 f(\eta)}{d \eta^2} \right)_{\eta=0}.$$

Dann müssen die Konvergenzradien η_1 und η_2 der Entwicklungen von $f(\eta)$ bzw. $f^*(\eta)$ und $F(\eta)$ größer als η_0 sein:

$$(94) \quad \left. \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\} > \eta_0,$$

falls die K Sa II-Integration ohne zu erheblichen Fehler $\delta(\varepsilon)$ ausführbar sein soll. (94) ist nicht erfüllt in Gebieten, wo η_1 zu klein oder η_2 zu klein oder η_0 zu groß ist. Im ersten Fall führt nur die VSa-Methode a) zum Ziel; wie man in den

beiden anderen zu verfahren hat, und wie groß die Reichweite der KSa II-Integration unter solchen Umständen ist, zeigt die folgende Untersuchung.

Da man hier voraussetzen kann, daß η_1 groß ist, also etwa:

$$(95) \quad e^{-\eta_1^2} \ll e^{-\eta^2} \quad [\text{vgl. (93)}],$$

kann man den Ansatz vereinfachen, indem man die Entwicklung von $f(\eta)$ mit einem kleinen angebbaren Fehler hinter dem dritten oder, falls auch $|f'''|$ klein ist, hinter dem vierten Glied, das dann in erster Linie maßgeblich ist, usw. abbricht, da wegen (95) die Glieder schließlich stark abnehmen müssen. Die Fragestellung soll nun in diesem Sinne verallgemeinert werden, indem nicht gerade ein Überwiegen des Gliedes 2. Ordnung: $x \frac{f''}{2!} \eta^2$, sondern allgemein p -ter Ordnung zugrunde gelegt wird, was entsprechend „ $KSa p$ “ zu nennen ist. Der Ausgangspunkt ist also ein Sa -Integral der Form:

$$(96) \quad J_{Sa} = \int_{Sa} G(\eta) e^{-i \mu_q^* \eta^p} d\eta,$$

und gefragt ist, wie man mit diesem zu verfahren hat, wenn $G(\eta)$:

1. von der Form:

$$(97) \quad G(\eta) = e^{-i \mu_q^* \eta^q},$$

2. von der Form:

$$(98) \quad G(\eta) = \frac{1}{\eta - \eta_0}$$

ist, und wenn insbesondere der Parameter $\mu_q = |\mu_q^*|$ groß oder η_0 klein wird.

Zunächst werde (96) ohne Rücksicht auf diese Größenverhältnisse als $KSa p$ -Integration formal ausgeführt, indem man in zwei Richtungen stärksten Gefälles der Exponentialfunktion, die hier einen Winkel $\frac{2m\pi}{p}$; $m = 1, 2$ usw. miteinander bilden, unter Taylorentwicklung gliedweise integriert. Solche Richtungen ζ_p [vgl. (59) für $p = 2$] bestimmen sich aus:

$$(99) \quad \zeta_p^{(m)} = \frac{\left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi - \gamma_p}{p}; \quad \gamma_p = \arg(\mu_p^*); \quad m = \text{ganzzahlig.}$$

Mittels der Substitution:

1. $\eta = s e^{i\zeta_p^{(1)}}$, $-\infty \leq s \leq 0$; 2. $\eta = s e^{i\zeta_p^{(2)}}$, $0 \leq s \leq +\infty$
erhält man nach elementaren Umformungen aus (96) mit

$$(100) \quad \begin{cases} G_0^{(\nu)} \equiv \left(\frac{d^{(\nu)} G}{d \eta^{(\nu)}} \right)_{\eta=0} : \\ J_{K S a p} = 2 \int_0^{\infty} (c_1 G_0 - c_2 G_0' s + c_3 G_0'' s^2 - \dots) e^{-\mu_p s^p} ds; \\ \mu_p = |\mu_p^*|, \end{cases}$$

worin die c_n von der Form:

$$e^{i\kappa \frac{\zeta_p^{(1)} + \zeta_p^{(2)}}{2}} \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{2 l \pi}{p}; \quad l = \text{ganzzahlig}$$

sind, also $|c_n|$ von der Ordnung 1 und $c_p = c_{2p} = \dots = 0$ ist.
Das wertet man mittels

$$(101) \quad \left\{ \int_0^{\infty} s^{\nu} e^{-\mu_p s^p} ds = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{p}\right)}{p \mu_p^{\frac{\nu+1}{p}}}\right.$$

(Jahnke-Emde, S. 28) aus und bekommt:

$$(102) \quad \left\{ J_{K S a p} = \frac{2}{p} I \left(\frac{1}{p} \right) \frac{G_0}{\mu_p^{1/p}} \right. \\ \left. \left\{ c_1 - \frac{c_2}{\mu_p^{1/p}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{G_0'}{1! G_0} + \frac{c_3}{\mu_p^{2/p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{G_0''}{2! G_0} - \dots \right\} \right\}.$$

Die Frage ist nun, für welche Werte von μ_p diese formal gewonnene Entwicklung konvergiert oder im Falle asymptotischer Semikonvergenz brauchbare Werte liefert. Hierzu bildet man aus den Gliedern a_n der Reihe

$$(103) \quad \lambda_{pr} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+r}}{a_n} \right|; \quad r = \text{endliche ganze Zahl};$$

(102) konvergiert bzw. divergiert, je nachdem $\lambda_{pr} \leq 1$ ist
Mittels der Stirlingschen Formel findet man:

$$(104) \quad \lambda_{vr} = p^{-\frac{r}{p}} \mu_p^{-\frac{1}{p}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^r \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \frac{G_0^{(n)}}{G_0^{n-r}} \right].$$

Zuerst untersuchen wir den Fall (97). Hier wird

$$(105) \quad \lambda_{pq} = \frac{\mu_q}{\mu_p^{1/p}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q}{p}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{q}{p} - 1} = \begin{cases} 0; & q < p; \\ \infty; & q > p; \end{cases}$$

die Entwicklung (102) konvergiert also für $q < p$, divergiert für $q > p$, was man auch direkt durch Verlagerung des Integrationsweges von I nach II in Fig. 17 zeigen kann. Sie lautet hier:

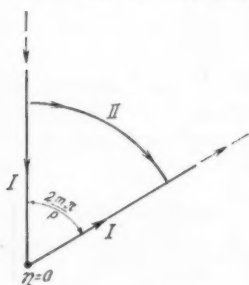
$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{KSaq} &= \frac{2}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{\mu_p^{1/p}} \\ &\left\{ c_1 \pm c_{q+1} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)}{1! \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}} \pm c_{2q+1} \frac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{p}\right)}{2! \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}}\right)^2 \pm \dots \right\}, \end{aligned} \right.$$

ist also eine Potenzentwicklung nach $\frac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}}$; entsprechend er-

hielte man hier die Auswertung des Integrals als *KSa_q*-Integration durch Vertauschen von p und q . Für $q > p$, wo (106) eine alternierende divergente, und zwar in dem hier interessierenden Falle großer μ_p eine asymptotische semi-konvergente Entwicklung im Sinne Poincarés ist, kann man in ähnlicher Weise, wie es bekanntlich in Fällen bei $p = 2$ möglich ist (vgl. z. B. L 24, S. 52; L 8, S. 543), zeigen, daß sie folgende Eigenschaft hat: Bricht man sie an einer Stelle ab, wo die Glieder noch dem Betrage nach abnehmen, so ist der Fehler-

betrag des Resultats kleiner als der des folgenden Gliedes. Wendet man das auf (106) an, so gilt: Sei ν_{qp} der Index, bis zu dem die Glieder abnehmen, so kann der prozentuale Fehler von (106):

$$(107) \quad |\epsilon_{pq}| < |C_{pq}| \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_{qp}(q+1)}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}}\right)^{\nu_{qp}}; \quad |C_{pq}| \sim 1$$



Zwei mögliche
Integrationswege
Fig. 17

gemacht werden. Gibt man nun umgekehrt einen maximalen Fehler ε vor, so wird hierdurch der Gültigkeitsbereich der Entwicklung (106) eingeschränkt:

$$(108) \quad x_{pq} \equiv \frac{\mu_p^{1/p}}{\mu_q^{1/q}} \geq \left(\frac{s}{|C_{pq}|} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_{pq}(q+1)}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{q^{p_{pq}}}} \equiv x_{pq}^{(0)}(\varepsilon).$$

Für kleinere Werte des charakteristischen Parameters x_p [vgl. hiermit und dem folgenden (80)–(82)] ist die konvergente Entwicklung J_{Ksaq} zu benutzen. Diese schreitet nach steigenden Potenzen von:

$$(109) \quad \frac{\mu_p}{\mu_q^{p/q}} = x_{qp}^{-p} = x_{pq}^p$$

fort, konvergiert also gerade in dem Gebiet, wo (106) versagt, besonders gut.

Wir fassen dieses Ergebnis, das für die praktische Ausführung der verallgemeinerten Sattelpunktsintegration wichtig ist¹⁾, zusammen: das Sattelpunktsintegral von der Form:

$$J_{Sa} = \int_{Sa} e^{-i\mu_q^* \eta^q - i\mu_p^* \eta^p} d\eta; \quad p < q$$

läßt sich im Gebiet:

$$\frac{\mu_p^{1/p}}{\mu_q^{1/q}} \equiv x_{pq} \geq x_{pq}^{(0)}(\varepsilon)$$

mittels Integration p -ter Ordnung als semikonvergente Entwicklung nach fallenden Potenzen von x_{pq}^q mit einem prozentualen Fehler kleiner als ε auswerten, in dem

$$(110) \quad \text{„Übergangsgebiet“} \quad x_{pq} \leq x_{pq}^{(0)}(\varepsilon)$$

als absolut konvergente Entwicklung nach steigenden Potenzen von x_{pq}^p , die gerade in (110) besonders rasch konvergiert praktisch ist es also für alle Werte von x_{pq} möglich, das Integral mittels weniger Glieder einer geeigneten Entwicklung zu berechnen. — Die Bedingung (108), (110) kann man wie in (58) bzw. (81a) ausdrücken: Im Geltungsbereich der asymptotischen Entwicklung muß das Glied p -ter Ordnung rasch ver-

1) Vgl. L 8, S. 557 Anmerkung.

änderlich gegen das q -ter Ordnung sein, d. h. es muß eine Größenordnung η_0 geben, so daß für $e^{-\mu_p \eta_0^p} \ll 1$ $e^{+\mu_q \eta_0^q}$ noch nicht $\gg 1$; das führt ebenfalls auf (108), (110). — Die hier eingeführten Größen $\kappa_{pq}^{(0)}(\epsilon)$ lassen sich bei vorgegebenem ϵ gemäß ihrer Definition leicht numerisch berechnen; so findet man z. B. für $\epsilon \lesssim 10$ Proz.:

$$(111) \quad \kappa_{23}^{(0)} \approx 1,4,$$

woraus sich mittels einfacher Umformung die in (82) eingehende Konstante ergibt (Quasilatenzübergang).

Der andere hier interessierende Fall ist (98); dort ist nach (104):

$$\lambda_{p1} = \frac{1}{\eta_0 (p \mu_p)^{1/p}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/p} = \infty,$$

also die Entwicklung (102) stets divergent bzw. semikonvergent; sie lautet:

$$(112) \quad \left\{ J_{K Sa p} = \frac{2}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{\eta_0 \mu_p^{1/p}} \right. \\ \left. \left\{ c_1 - c_2 \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{1}{\eta_0 \mu_p^{1/p}} + c_3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{1}{(\eta_0 \mu_p^{1/p})^2} - \dots \right\} \right\}.$$

Man kann diesen Fall formal auf den soeben behandelten mit $q = 0$ zurückführen, indem man schreibt:

$$\frac{1}{\eta - \eta_0} = e^{-\log(\eta - \eta_0)}.$$

Der κ_{pq} entsprechende charakteristische Parameter ist dann:

$$(113) \quad \kappa_{p \eta_0} = \eta_0 \mu_p^{1/p}$$

und der Geltungsbereich der Entwicklung (112) durch eine (108) entsprechende Bedingung der Form:

$$(114) \quad \kappa_{p \eta_0} \geq \kappa_{p \eta_0}^{(0)}(\epsilon)$$

begrenzt, die man auch in der (58) bzw. (81a) entsprechenden Form:

$$(114a) \quad e^{-\eta_0^p \cdot \mu_p} \ll 1$$

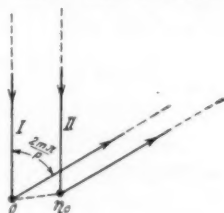
schreiben kann; sie besagt, daß in dem durch (114) ausgeschlossen Übergangsgebiet [vgl. (110)] die Polfunktion (98) „nullter Ordnung“ als der rascher veränderliche Teil des Integranden anzusehen ist. Zu einer für das Übergangsgebiet

geeigneten konvergenten Entwicklung nach steigenden Potenzen von $\kappa_{p\eta_0}$ kommt also durch sinngemäße Übertragung der oben angewendeten Methode: dort wurde der den Winkel

$\frac{2m\pi}{p}$ einschließende Gefälleweg in einen mit dem Winkel $\frac{2m\pi}{q}$ verwandelt, also hat hier eine Parallelverschiebung des

Gefälles um η_0 zu erfolgen¹⁾, so daß als Anfangspunkt der Entwicklung der Pol selbst gewählt wird, wie es Fig. 18

zeigt; dadurch wird die raschere Veränderlichkeit der Polfunktion dokumentiert. Zugleich zeigt sich hierin der eigentliche Sinn der verallgemeinerten Sattelpunktmethode: es kommt nicht eigentlich darauf an, das Integral zwischen zwei „Tal“gebieten über den „Paß“ als minimales Maximum zu führen (vgl. die Bezeichnung „Paßmethode“), sondern auf einem Wege, der einerseits möglichst kurz



Verschiebung des Integrationsweges

Fig. 18

ist, längs dessen aber andererseits der Integrand ein möglichst einfaches Verhalten zeigt, d. h. mit Hilfe einer einzigen Entwicklung darstellbar ist. Das wäre z. B. auf dem „Paßweg“ I von Fig. 18 bei

$\kappa_{p\eta_0} < \kappa_{p\eta_0}^{(0)}$ nicht der Fall, da hier $\frac{1}{\eta - \eta_0}$ für $\eta < \eta_0$ nach steigenden, für $\eta > \eta_0$ nach fallenden Potenzen zu entwickeln wäre, was zwar (im einfachsten Falle $p = 2$) mittels bekannter Funktionen auswertbar wäre, aber zu einem Ergebnis von sehr undurchsichtiger Form führen würde im Gegensatz zu der von η_0 ausgehenden Entwicklung längs des „Kurzweges“ II, bei der diese Schwierigkeit fortfällt. Daher wird hierfür die Bezeichnung „Kurzwegintegration p -ter Ordnung“ ($Ku p$) gewählt.

Mit $\sigma = \eta - \eta_0$ erhält man aus (96), (98) für das $Ku p$ -Integral:

$$(115) \quad J_{Ku p} = \int_{Ku p} \frac{e^{i\mu^* \nu (\sigma + \eta_0)^p}}{\sigma} d\sigma.$$

1) Vgl. auch L 22, Fig. 5.

Da $d\sigma/\sigma$ auf den geradlinigen Strecken unabhängig von der Richtung derselben ist, heben sich deren Unendlichkeiten bei $\sigma = 0$ auf, da die eine nach innen, die andere nach außen durchlaufen wird. Man kann also, anstatt sie bis nach dem Pol hineinzuführen, diesen in einem kleinen Bogen mit dem Winkel $\frac{2m\pi}{p}$ umfahren und erkennt so, daß (115) außer den Beiträgen der beiden geradlinigen Stücke noch den p/m -ten Teil des Residuums bei $\sigma = 0$ liefert. Man erhält also im ganzen [vgl. (99)]:

$$\begin{aligned} J_{Kup} &= \frac{2\pi im}{p} e^{-i\gamma_p^p \eta_0^p} + \int_{-\infty}^0 \frac{ds}{s} e^{-\mu_p s} \left[s + e^{-i\zeta_p^{(1)} \eta_0} \right]^p \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p s} \left[s + e^{-i\zeta_p^{(2)} \eta_0} \right]^p = \frac{2\pi im}{p} e^{-i\gamma_p^p \eta_0^p} \\ &\quad + \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p s^p} + \binom{p}{1} \mu_p \eta_0 e^{-i\zeta_p^{(1)} s^{p-1}} - \dots - \binom{p}{p} \mu_p \eta_0^p e^{-i\zeta_p^{(1)} s} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p s^p} - \binom{p}{1} \mu_p \eta_0 e^{-i\zeta_p^{(2)} s^{p-1}} - \dots - \mu_p \eta_0^p e^{-i\zeta_p^{(2)} s} \right\}. \end{aligned}$$

Behält man hier nur das einzige den Faktor η_0 nicht enthaltende Glied $\mu_p s^p$ im Exponenten bei und entwickelt die übrigen in die Exponentialreihe, so erhält man durch Zusammenfassung der beiden Integrale ein Ergebnis von der Form:

$$J_{Kup} = \frac{2\pi im}{p} e^{-i\gamma_p^p \eta_0^p} + \int_0^{\infty} P(s) e^{-\mu_p s^p} ds,$$

worin $P(s)$ eine absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe in s mit nicht verschwindendem konstantem Glied ist. Durch gliedweise Integration erhält man bei Berücksichtigung von (101) und (113):

$$(116) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{Kup} &= \frac{2\pi im}{p} e^{-i\gamma_p^p \eta_0^p} + \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \eta_0^{p-1} \\ &\quad \cdot \left\{ a_1 - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{2! \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} p \eta_0^{p-1} + a_3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{3! \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} (p \eta_0^{p-1})^2 - \dots \right\}, \end{aligned} \right.$$

worin die in komplizierter Weise gebildeten a_n absolut von der Ordnung 1 sind. Das ist die gesuchte konvergente Übergangsentwicklung nach steigenden Potenzen von $x_{p\eta_0}$. Bei $x_{p\eta_0} = 0$ reduziert sie sich auf das Residuum. Daraus können wir sofort für das uns interessierende Problem schließen: Zur Signalzeit T_a ist [vgl. Text vor (77), (78)]

$$(117) \quad P_h = \frac{1}{2} P_a \quad (p = 2);$$

fällt α mit einer Frequenz ω_m zusammen, so gilt bei $T = T_a = T_m$:

$$(118) \quad P_h = \frac{1}{3} P_a \quad (p = 3).$$

§ 12. Anwendung: Berechnung von Haupt- und Quasilatenzübergang; Aufschaukelzeit und Frontverflachung

Wir werten mittels der verallgemeinerten Sattelpunktmethode zuerst den Hauptübergang aus, — wobei zuerst α in hinreichender Entfernung von ω_m angenommen wird, so daß das Glied 3. Ordnung gegen das 2. Ordnung sehr langsam veränderlich ist —. Die außerhalb desselben gültige $KSaII$ -Entwicklung (65) bzw. (102) mit $p = 2$ lautet bei Benutzung des entsprechenden dimensionslosen Parameters nach (113)

$$(119) \quad x_s = 2 x_{2\eta_0} = 2(\omega_s - \alpha) \sqrt{\frac{|k_s''| x}{2!}};$$

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} P_h &= \frac{e^{i\left(\eta_s \mp \frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\pi} x_s} \left\{ 1 \mp \frac{i}{2} \left(\frac{x_s}{2}\right)^{-2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \left(\frac{x_s}{2}\right)^{-4} \right. \\ &\quad \left. \pm i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left(\frac{x_s}{2}\right)^{-6} + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Das obere Vorzeichen gilt, falls $k_s'' > 0$ bzw. $\omega_N > \alpha > \omega_m$, das untere für $k_s'' < 0$, $\omega_m > \alpha > \omega_s$ (vgl. Fig. 8); der Einfachheit halber entscheiden wir uns hier für das eine, etwa das obere. — Man erkennt, daß (120) in den beiden Fällen (79) $T \geq T_a$ nach (119) verschiedenes Vorzeichen hat, während des Hauptübergangs wechselt also der flüchtige Anteil die Phase (vgl. L 1, S. 226). Für den Hauptübergang selbst ist nach (80):

$$(121) \quad x_s \approx x_a = \frac{t - t_a}{\sqrt{\frac{|k_a''| x}{2!}}}.$$

Bei Vorgabe von $\varepsilon < 10$ Proz. erhält man in elementarer Rechnung für (114):

$$(122) \quad \kappa_a^{(0)} \approx 3,26,$$

also die Aufschaukelzeit [vgl. (81 b)]:

$$(123) \quad t_h \approx 6,52 \sqrt{\frac{|k_a''| x}{2!}} \approx 4,6 \sqrt{|k_a''| x};$$

die Größe (81a) bzw. (114a) bei $p = 2$ wäre hier:

$$(122a) \quad e^{-\left(\frac{\kappa_a^{(0)}}{2}\right)^2} \approx 7 \text{ Proz.}$$

Die Übergangsentwicklung (116) für $p = 2$ nach Potenzen von κ_a ist die gesuchte Darstellung von P_h für $|\kappa_a| \lesssim 3,26$. Da das Kurzwegintegral (115) hier auf eine bekannte Transzendentente führt, werten wir es aber direkt aus; mit (78) wird:

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} P_h &= P_a(x, t) \\ &\cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|k_a''| x}{2!} \sigma^2} \frac{e^{i \frac{\pi}{4} (t - t_a) \sigma}}{\sigma} d\sigma \right]; \end{aligned} \right.$$

hieraus durch Differentiation nach t , Vertauschung der Integrationsfolge und Fortfall der in σ ungeraden Teile:

$$(125) \quad \left\{ \begin{aligned} P_h &= P_a \left[\frac{1}{2} + \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{2\pi i} \int_0^{t-t_a} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{|k_a''| x}{2!} \sigma^2} e^{i \frac{\pi}{4} \tau \sigma} d\sigma d\tau \right] \\ &= P_a \left[\frac{1}{2} + \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{2\pi i} \int_0^{t-t_a} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{|k_a''| x}{2!} \sigma^2} \cos\left(e^{-i \frac{\pi}{4}} \tau \sigma\right) d\sigma d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2} P_a \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi |k_a''| x}} \int_0^{t-t_a} e^{i \left(\frac{\tau^2}{2 |k_a''| x} - \frac{\pi}{4} \right)} d\tau \right]. \end{aligned} \right.$$

Die hierin auftretende transzendentente Funktion

$$(126) \quad F r(v) = \int_0^v e^{i u^2} du \quad (\text{Fresnelsche Funktion})$$

ist für reelle v im wesentlichen mit den Fresnelschen Integralen¹⁾ identisch; mit Hilfe der Substitution $u^2 = z$ erhält man:

$$(127) \quad \left\{ \begin{aligned} F r(v) &= \frac{1}{2} \int_0^{v^2} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [C(v^2) + i S(v^2)]; \quad \left. \begin{aligned} C(z) &= \\ S(z) &= \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \left\{ \begin{aligned} \cos z \\ \sin z \end{aligned} \right\} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \right.$$

Aus (125) wird also:

$$(128) \quad P_h = \frac{1}{2} P_a(x, t) \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} F r\left(\frac{x_a}{2}\right) \right].$$

Der Betrag des Faktors von P_a gibt an, wie sich die Amplitude der stationären Frequenz im Hauptübergang aufschauelt; man erhält:

$$(129) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \frac{P_h}{P_a} \right| &= \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{[1 + C\left(\left(\frac{x_a}{2}\right)^2\right) + S\left(\left(\frac{x_a}{2}\right)^2\right)]^2 + [C\left(\left(\frac{x_a}{2}\right)^2\right) - S\left(\left(\frac{x_a}{2}\right)^2\right)]^2} \end{aligned} \right.$$

Den Verlauf dieser Funktion zeigt Fig. 19; der Maßstab ist x_a ,

also der im Verhältnis $1: \sqrt{\frac{|k_a'' x|}{2!}}$ verkürzte Zeitmaßstab. (129)

erfüllt (117) und nähert sich für große negative x_a monoton dem Wert 0, für positive mit Oszillationen abnehmender Amplitude und Periode dem Wert 1, doch sei betont, daß nur der mittlere Teil, der ungefähr durch (122) begrenzt und in Fig. 19 angedeutet ist, den Signalablauf mit guter Genauigkeit wiedergibt; außerhalb liefert die asymptotische Entwicklung (120) bzw. (79b) genauere Werte, da es bei der dann merklichen Größe von $|\omega_s - \alpha|$ nicht mehr richtig ist, die Polfunktion als den raschest veränderlichen Faktor anzusehen; das würde eine fehlerhafte Auswertung ergeben, weil dann das Glied 3. Ordnung nicht mehr relativ langsam veränderlich ist.

Als Funktion von $(x_a/2)^2$ ist (129) dieselbe, die in der Theorie der Beugung die Amplitudenverteilung der Fresnel-

1) Jahnke-Emde, S. 23ff.; hier auch Tafeln von $C(z)$ und $S(z)$.

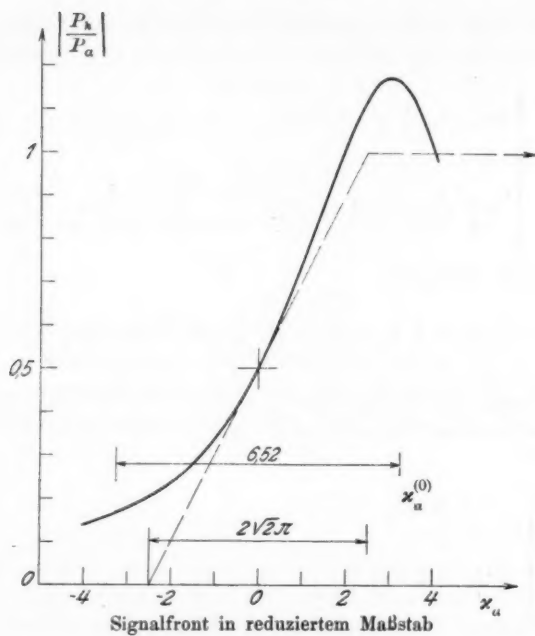
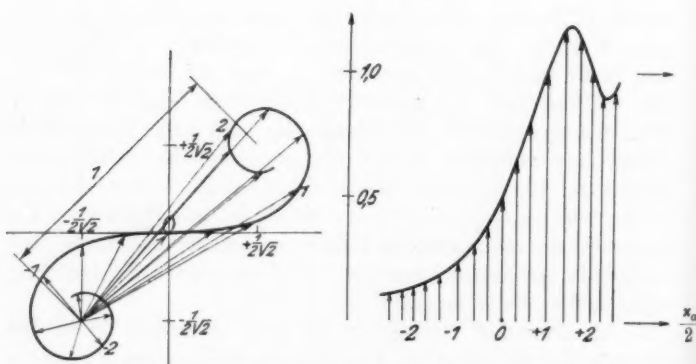


Fig. 19



Konstruktion der Signalfront aus der Cornuschen Spirale

Fig. 20

schen Beugungsbilder an Schattenkanten wiedergibt.¹⁾ Die Form (118) legt nahe, sie, wie dort üblich, mit Hilfe der Cornuschen Spirale, der Abbildung der reellen Achse durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot Fr(v)$, zu konstruieren, wie es in Fig. 20 gezeigt ist.²⁾

Mittels der Potenzentwicklung der Fresnelschen Integrale erhält man hier die Entwicklung (116) für $p = 2$:

$$(130) \quad \frac{P_h}{P_a} = \frac{1}{2} + e^{-i \frac{\pi}{4}} \frac{x_a}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + i \frac{\left(\frac{x_a}{2}\right)^2}{3 \cdot 1!} - \frac{\left(\frac{x_a}{2}\right)^4}{5 \cdot 2!} - i \frac{\left(\frac{x_a}{2}\right)^6}{7 \cdot 3!} + \dots \right\}$$

und entnimmt aus ihr als Neigung der Kurve (129) bei $t = t_a$:

$$(131) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d \left| \frac{P_h}{P_a} \right|}{d x_a} \right)_{x_a=0} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \text{ bzw. } \left(\frac{d \left| \frac{P_h}{P_a} \right|}{dt} \right)_{t=t_a} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} |k'_a| x}; \\ \left(\frac{d \left| \frac{P_h}{P_a} \right|}{dt} \right)_{\max} &\approx \frac{1,39}{2\sqrt{\pi} |k'_a| x}, \end{aligned} \right.$$

die Aufschaukelgeschwindigkeit des Signals, die mit $\sqrt{|k'_a| x}$ abnimmt. Ersetzt man in roher Näherung den Ablauf des Signals durch den gebrochenen Linienzug in Fig. 19 mit der Tangente an die Amplitudenkurve³⁾, so wird die tangential definierte Aufschaukelzeit:

$$(132) \quad t_h = 2 \sqrt{\pi |k'_a| x}$$

— die mit der auf anderem Wege gewonnenen Bestimmung (123) nahezu überstimmt; vgl. Fig. 19 —. Die ursprünglich senkrechte Amplitudenfront des Einsatzsignals wird also beim Vordringen asymptotisch mit $\sqrt{|k'_a| x}$ abgeflacht. Daraus folgt z. B., daß ein plötzlich einsetzendes und wieder abbrechendes, während der Zeit t_1 mit der Amplitude 1 wirksames Signal der Frequenz α (Rechtecksignal, Telegraphiersignal), nur für $t_1 > t_h$, also etwa in Tiefen $x \lesssim \frac{t_1^2}{4\pi |k'_a|}$ eine Maximalamplitude von der Ordnung 1 erreicht!

1) Vgl. L 10, S. 247.

2) Vgl. Näheres z. B. in der Darstellung von Sommerfeld, L 29, S. 473.

3) Vgl. L 14, Figg. 5 und 6.

Benutzt man andererseits in (128) die asymptotischen Entwicklungen der Fresnelschen Integrale für große $|\kappa_a|$, so erhält man:

$$(133) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_h}{P_a} &\approx \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\kappa_a}{|\kappa_a|} \right] - \frac{e^{i \left[\left(\frac{\kappa_a}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{4} \right]}}{2 \sqrt{\pi} \kappa_a} \\ &\cdot \left\{ 1 - \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa_a}{2} \right)^{-2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \left(\frac{\kappa_a}{2} \right)^{-4} \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Man verifiziert leicht, daß das Hauptglied dieser Entwicklung bei Ersatz von κ_a durch κ_p (121) mit dem der auf ganz anderem Wege gewonnenen asymptotischen Entwicklung (120) bzw. (79b) übereinstimmt; das setzt nochmals die verbindende Funktion der mittels Kurzwegintegration gewonnenen Übergangsentwicklung in Evidenz und lehrt andererseits, daß (128), (129) außerhalb des Übergangsgebietes nicht angewendet werden soll, worauf schon dort hingewiesen wurde.

Zur Darstellung des Quasilatenzübergangs ist nach § 11 das Glied 3. Ordnung als das raschest veränderliche zu behandeln. Der dimensionslose charakteristische Parameter ist hier nach (108):

$$(134) \quad \kappa_{23} = \frac{\sqrt{\frac{|k'_2|}{2!} x}}{\sqrt[3]{\frac{|k''_2|}{3!} x}},$$

und die außerhalb des Übergangs, also nach (111) für $|\kappa_{23}| \gtrsim 1,4$ gültige KSaII-Entwicklung des betreffenden Einzelterms läßt sich leicht aus der allgemeinen Form (65) analog zu (120) in die spezielle nach fallenden Potenzen von κ_{23}^2 umschreiben, wobei hier, da $|\alpha - \omega_m|$ genügend groß vorausgesetzt ist, das Polglied als langsam veränderlich zu betrachten ist. — Als Gefällerrichtungen, die einen Winkel von $\frac{2}{3}\pi$ bilden, findet man nach (99) und (71):

$$(135) \quad \zeta_3 = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}.$$

Den Integrationsweg und das Relief der Exponentialfunktion bei ω_m nach (71) und (73) zeigt Fig. 14. Aus einem praktischen Grunde soll aber der Integrationsweg während des ganzen Quasilatenzüberganges nicht nur in den Gefällerrichtungen 3. Ordnung, sondern auch unter Parallelverschiebung

über den Tripelpunkt ω_m selbst statt über den jeweiligen Sattelpunkt ω_s , d. h. nach § 11 als *Ku III*-Integral geführt werden: Denn da bei ω_s das Glied 1. Ordnung, bei ω_m das Glied 2. Ordnung verschwindet, bekommt man so statt der Übergangsentwicklung nach Potenzen von x_{23} eine solche nach x_{13} , und diese konvergiert, wie eine einfache Überlegung zeigt, dort rascher. Den betreffenden Parameter, der mit x_m bezeichnet sei, erhält man nach dem analogen Verfahren aus x_{23} wie in (80) x_α aus x_s ; mit $k_s''' \approx k_m'''$ und (72), (73) wird:

$$(136) \quad x_m = \frac{t - t_m}{\sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}},$$

also nach (111):

$$(137) \quad x_m^{(0)} \approx 1,29 \quad \text{bei } \varepsilon < 10 \text{ Proz.}$$

und damit der Quasilatenzübergang [vgl. (82)]:

$$(138) \quad t_q = \approx 1,42 \sqrt[3]{k_m''' x}.$$

Die konvergente Entwicklung stellt man nach dem Verfahren von § 11 her (wir bezeichnen den Übergangsterm mit P_q):

$$\begin{aligned} P_q &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ku III} F(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega \\ &= \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i} \int_{Ku III} e^{i \left[t\eta_m - k_m' x \eta_m - \frac{k_m'''}{3!} x \eta_m^3 \right]} d\eta_m \end{aligned}$$

mit $\eta_m = \omega - \omega_m$, $\varphi_m = \omega_m t - k_m x$ [vgl. (55), (57)]; also nach (54):

$$\begin{aligned} P_q &= \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i} \int_{Ku III} e^{-i \frac{k_m'''}{3!} \eta_m^3} e^{i(t-t_m)\eta_m} d\eta_m \\ &= \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i} \left\{ e^{i \frac{\pi}{6}} \int_{-\infty}^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[i e^{i \frac{\pi}{6}} (t-t_m) s \right]^n}{n!} e^{-\frac{k_m'''}{3!} s^3} ds \right. \\ &\quad \left. + e^{-i \frac{\pi}{6}} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[i e^{i \frac{\pi}{6}} (t-t_m) s \right]^n}{n!} e^{-\frac{k_m'''}{3!} s^3} ds \right\} \end{aligned}$$

und nach (101):

$$(139) \quad \left\{ P_q = \frac{F_m e^{i q_m}}{2\pi i} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{\frac{k_m'' x}{3!}}} \left\{ 1 + \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{1! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{3! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^3 - \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{4! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^4 + \frac{\Gamma(\frac{7}{3})}{6! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^6 \dots \right\} \right\}$$

[Die Verwendung des Sattelpunktswegs anstatt des Kurzwegs würde bei $e^{i q_s} \approx e^{i(q_m + \frac{2}{3^{1/2}} x_m^{3/2})}$ anstatt $e^{i q_m}$ eine Entwicklung liefern, deren Glieder dem Betrage nach wie:

$$1; \frac{\Gamma(\frac{3}{3})}{2! \Gamma(\frac{1}{3})} 3 x_m; \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{3! \Gamma(\frac{1}{3})} (3 x_m)^{3/2}; \dots$$

fortschreiten, die also schlechter konvergieren würde]. Das Anwachsen von $|P_q|$ ergibt die Aufschaukelgeschwindigkeit, die Amplitudenzunahme beim Übergang vom aperiodischen zum oszillierenden Zustand:

$$(140) \quad \frac{1}{|F_m|} \frac{d|P_q|}{dt} = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2\pi \sqrt[3]{3} \left[\frac{k_m'' x}{3!} \right]^{2/3}} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{2! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^2 \dots \right\}.$$

Wir betrachten jetzt den Fall $\alpha = \omega_m$. Hier ist nach § 11 *KuIII*-Integration über den Pol erforderlich; der charakteristische Parameter ist also wieder x_m (136). Die hier zu beachtenden Kriterien bezüglich des Gültigkeitsbereichs der semikonvergenten Entwicklung sind wegen der Wirkung von α als Pol: $x_s \approx x_a \gtrsim 3,26$ (122), wegen der als Tripelpunkt: $x_m \gtrsim 1,29$ (137). Nach (72), (73) gilt hier: $x_s \approx 2 \sqrt[4]{\frac{x_m^3}{3}}$, also ist die erste Bedingung, die $x_m \gtrsim 2,77$ verlangt, als die weitergehende maßgeblich:

$$(141) \quad x_m^{(0)} \approx 2,77;$$

damit wird der hier den Quasilatenzübergang mitenthaltende Hauptübergang t_{hq} :

$$(142) \quad t_{hq} = 3,05 \sqrt[3]{k_m'' x}.$$

Für die Übergangsentwicklung erhält man nach dem Verfahren (115), (116), wenn der Hauptterm hier mit P_{h_0} bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}
 P_{hq} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ku III} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega - \alpha} d\omega = P_a \left\{ \frac{1}{3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{Ku III} \frac{d\eta_m}{\eta_m} e^{-i \frac{k_m'''}{3!} x} \eta_m^3 e^{i(t-t_m)\eta_m} \right\}; \quad \left(\begin{array}{l} \eta_m = \omega - \omega_m \\ = \omega - \alpha \end{array} \right); \\
 \frac{P_{hq}}{P_a} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{k_m'''}{3!} \sigma^3} e^{-\frac{t-t_m}{2}\sigma} \frac{\sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (t-t_m) \sigma \right]}{\sigma} d\sigma, \\
 (143) \quad &\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{hq}}{P_a} = \frac{1}{3} + \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi\sqrt{3}} \left\{ \frac{x_m}{1!} - \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^2 \right. \\ \quad \left. - \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{4! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^4 + \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{5! \Gamma(\frac{1}{3})} x_m^5 + \dots \right\}. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Diese Funktion, die die Aufschaukelung des stationären Signals während des Übergangs angibt, hat qualitativ einen ganz ähnlichen Verlauf wie (128) ÷ (130); sie ist in Fig. 21 wiedergegeben. Man könnte für (143) als Analogon zu (133) eine asymptotische Entwicklung für größere x_m herleiten, doch sei hierauf verzichtet, da diese, wie im Anschluß an (129) bzw. (133) auseinandergesetzt, dort nicht mehr zweckmäßig wäre.¹⁾ Für die Aufschaukelgeschwindigkeit erhält man aus (143):

$$(144) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d \left(\frac{P_{hq}}{P_a} \right)}{dx_m} \right)_{x_m=0} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi\sqrt{3}} = 0,246; \\ \left(\frac{d \left(\frac{P_{hq}}{P_a} \right)}{dt} \right)_{t_a} = \frac{0,447}{\sqrt[3]{k_m'''} x}; \quad \left[\left(\frac{d \left(\frac{P_{hq}}{P_a} \right)}{dt} \right)_{\max} \approx \frac{0,665}{\sqrt[3]{k_m'''} x} \right], \end{array} \right.$$

also die tangential definierte Aufschaukelzeit [vgl. (132)]:

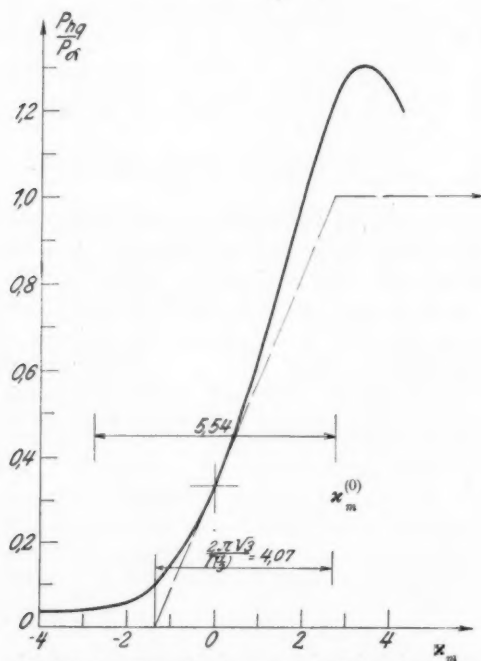
$$(145) \quad t_{hq} = 2,24 \sqrt[3]{k_m'''} x \quad [\text{vgl. (142)}].$$

Man kann (wie in Fig. 19) die Amplitudenkurve roh durch gebrochenen Linienzug annähern. Wie ein Vergleich von Figg. 19 und 21 zeigt, steigt hier die Kurve plötzlicher an

1) F. Pollaczek verwendet in L 22, wo er in einem Spezialfall die Transzendente (143) herleitet, diese Funktion über das eigentliche Übergangsgebiet hinaus (a. a. O., Fig. 4).

und geht weiter über 1 hinaus, was wegen des Zusammenwirkens beider Übergänge verständlich ist. Der Wert $\frac{1}{2}$ liegt nahezu über der Mitte der Tangente, also ist in diesem Sinne die Signalzeit:

$$(146) \quad t_a \approx t_m + 0,6 \sqrt{\frac{k_m'' x}{3!}}$$



Gestalt der Signalfront, wenn die Hauptfrequenz in einem Tripelpunkt liegt

Fig. 21

Etwas verwickelter als bisher liegen die Verhältnisse, wenn nicht $\alpha = \omega_m$ ist, aber α so nahe ω_m liegt, daß der Quasilatenzübergang noch ganz innerhalb des Hauptübergangs liegt. Wie die numerische Rechnung (wieder mit $\epsilon < 10$ Proz.) zeigt, ist das der Fall für:

$$(147) \quad K_{m\alpha}^* = |\omega_m - \alpha| \cdot \sqrt[3]{\frac{k_m'' x}{3!}} \lesssim 0,96;$$

innerhalb (147) gilt dann in guter Näherung:

$$(148) \quad K_{ma}^* \approx \sqrt{\frac{1}{3} \frac{t_a - t_m}{3 \sqrt{\frac{k''_{ma} x}{3!}}}}$$

Hier sind zwei charakteristische Parameter enthalten, die analog zu x_m (136) sind, der zeitlich variable:

$$(149) \quad x_{ma} = \frac{t - t_a}{3 \sqrt{\frac{k''_{ma} x}{3!}}}$$

und der konstante:

$$(150) \quad x_{ma}^* = \frac{t_a - t_m}{3 \sqrt{\frac{k''_{ma} x}{3!}}} \approx 3 (K_{ma}^*)^2,$$

wobei

$$(151) \quad k''_{ma} \approx k'' \left(\frac{\omega_m + \alpha}{2} \right).$$

Die Übergangsentwicklung (143), die wieder durch *KuIII*-Integration gewonnen wird, verallgemeinert sich dann zu:

$$(152) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_{h\eta}}{P_a} &= \frac{1}{3} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi\sqrt{3}} \left\{ \frac{x_{ma}}{1!} - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x_{ma}^2}{2!} + i\sqrt{3x_{ma}^*} \right) \right. \\ &\quad - \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x_{ma}^4}{4!} + i\frac{x_{ma}^2}{2!} \sqrt{3x_{ma}^*} - \frac{3x_{ma}^*}{2!} \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x_{ma}^5}{5!} + i\frac{x_{ma}^3}{3!} \sqrt{3x_{ma}^*} - \frac{x_{ma}}{1!} \cdot \frac{3x_{ma}^*}{2!} \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x_{ma}^7}{7!} + i\frac{x_{ma}^5}{5!} \sqrt{3x_{ma}^*} - \frac{x_{ma}^3}{3!} \cdot \frac{3x_{ma}^*}{2!} \right. \\ &\quad \left. \left. - i\frac{x_{ma}}{1!} \frac{(3x_{ma}^*)^{3/2}}{3!} \right) - \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\dots \right) - \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

(152) ist sowohl bzgl. x_{ma}^* wie x_{ma} konvergent; die x_{ma}^* enthaltenden Glieder rühren von dem bei $\omega = \alpha$ für $t_a > t_m$ wieder vorhandenen Glied 2. Ordnung her, das bei Ausführung der *Ku III*-Integration als das langsamer veränderliche in eine Potenzreihe entwickelt wurde. — Da für den Bereich der *Ku III*-Integration über den Pol (141) maßgeblich ist, der Bereich aber, in dem hierbei das Glied 3. Ordnung rascher veränderlich ist als das 2. Ordnung, nur etwa die durch (137) bestimmte Größe hat, also wegen (151) reichlich gerechnet:

$$(153) \quad x_{ma}^* \lesssim 1,4,$$

ist es außerhalb (153), aber innerhalb (141) zweckmäßig, P_h wieder als *Ku II*-Integral über den Pol zu führen und dabei das Glied 3. Ordnung als langsamer veränderlich zu entwickeln. Dann erhält man als Resultat eine Verallgemeinerung von (130), die x_{ma}^* enthält und nach (105) hierin semikonvergent ist:

$$(154) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_h}{P_a} &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{x_a}{1!} + \frac{i}{2} \left[\frac{x_a^2}{3!} + (3x_{ma}^*)^{-2/4} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \left[\frac{x_a^3}{5!} + \frac{x_a^2}{2!} (3x_{ma}^*)^{-3/4} \right] \right. \\ &\quad \left. - i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left[\frac{x_a^4}{7!} + \frac{x_a^3}{4!} (3x_{ma}^*)^{-1/4} + \frac{x_a^2}{1!} (3x_{ma}^*)^{-5/4} \right] + \dots \right\}; \end{aligned} \right.$$

da hierbei noch nicht x_{ma}^* merklich $> 1,4$ ist [sonst könnte man wieder die einfachere Entwicklung (130) bzw. (128) benutzen], gilt näherungsweise:

$$(155) \quad x_a = \frac{t - t_a}{\sqrt{\frac{|k'_a|}{2!} x}} \approx \frac{t - t_a}{\sqrt[4]{\frac{k''_m x (t_o - t_m)}{2!}}}.$$

Praktisch vermitteln (152), (154) einen stetigen Übergang zwischen (143) und (128): Die Amplitude von P_a zur Zeit t_a liegt zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$, die Steilheit zwischen den Werten (144) und (131).

§ 13. Die Signalgeschwindigkeit als asymptotischer Begriff;
„lange“ und „kurze“ Distanzen; Dispersionsmaß.
Audeutende Behandlung kurzer Distanzen

Der Signalablauf in einem verlustfreien Kontinuum mit Latenzzeit ist jetzt in allen Phasen dargestellt, wenn man nach § 7 „genügend“ große Tiefe x voraussetzt — was also

bekannt ist, ist die asymptotische Dispersionsverzerrung, auf die sich die Fragestellung hauptsächlich bezieht [vgl. § 5]. Es fehlen noch größenordnungsmäßige Angaben über die hierzu erforderliche Mindestgröße von x . Eng hiermit zusammenhängend ist die Frage nach der Größe der „Aufzeit“ t_a bzw. T_a , der Grenze zwischen Vorlauf und Ablauf, als Funktion von x bzw. die Frage, von welcher Tiefe ab man berechtigt ist, von einer von der Kopfgeschwindigkeit verschiedenen Signalggeschwindigkeit (77) zu sprechen; da T_a der Beginn der asymptotischen Darstellung bzw. Ausführbarkeit der Sattelpunktsintegration ist und alle eingeführten asymptotischen Begriffe wie Signalzeit usw. diese zur Voraussetzung haben, sind dieselben, soweit sie mit α zusammenhängen, erst akut in Tiefen, wo:

$$(156) \quad T_a > T_a$$

gilt, soweit sie mit einer Frequenz ω_m zusammenhängen, erst bei:

$$(156a) \quad T_m > T_a.$$

Die Schlüsselgröße ist also hierbei die Aufzeit. Nun ist aus dem Vorangehenden ersichtlich, daß diese Fragen, auf einen bestimmten Sattelpunkt ω_s bezogen, an eine genügende Größe

von $\sqrt{\frac{|k_s''| x}{2!}}$, bzw. falls ω_s nahe einer Stelle ω_m liegt, von

$\sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}$ geknüpft sind. Diese Ausdrücke, die nach (81), (82),

(123), (132), (142), (145) die asymptotische Frontverflachung eines ω_s -Einsatzsignals angeben, sind also repräsentativ für die durchlaufene „Länge“ des Systems bzgl. der Frequenz ω_s und ermöglichen es, in diesem Sinne wenigstens qualitativ von „langen“ und „kurzen“ Distanzen x in Systemen zu sprechen; als Bezugsfrequenz wird bei einem stationären Signal, wenn nach der Existenz der asymptotischen Signalgrößen gefragt ist, die Frequenz α zu wählen sein — vgl. (156)!

Zu einer quantitativen Diskussion wären allgemeine Zahlenangaben von der Art der in §§ 11, 12 eingeführten $\kappa^{(0)}$ -Größen erforderlich. Falls die Aufzeit kleiner als die kleinste Quasilatenzzeit ist, — was bei großer Tiefe x der Fall ist —, sind dieselben leicht zu machen, da dann nur die Sattelpunkte des

D_∞ -Gebietes merkbliche Beiträge liefern, also die Aufzeit als der Zeitpunkt definiert ist, von dem ab die Sattelpunktsintegration über diese ausführbar ist; das kommt nach (46), (47) auf die bekannte Frage hinaus, von wo ab die asymptotische Darstellung Besselscher Funktionen anwendbar ist. Im allgemeinen Falle hätten aber ohne spezielle Voraussetzungen über $k(\omega)$ numerische Aussagen über die Größe von T_a eine sehr komplizierte Form, während sie im Einzelfall relativ einfach zu gewinnen sind. Wir sehen daher hier von ihnen ab.

Zu ungefähren Größenangaben über die hauptsächlich interessierende Frage, wann (156) erfüllt ist, kommt man indessen durch die einfache Überlegung, daß die halbe Aufschaukelzeit notwendig kleiner sein muß als die Differenz zwischen Signal- und Latenzzeit. Bei einem Größenverhältnis derselben von $1:(1+c_1)$ — im allgemeinen kann c_1 merklich < 1 sein — gilt also nach (42), (77), (123):

$$2,3 \sqrt{|k''_a| x} \lesssim \frac{1}{1+c_1} \left(k'_a - \frac{1}{v_k} \right) x,$$

bzw. falls α nahe einer Frequenz ω_m liegt, nach (142):

$$1,53 \sqrt[3]{|k'''_m| x} \lesssim \frac{1}{1+c_1} \left(k'_m - \frac{1}{v_k} \right) x.$$

Daraus erhält man für x die untere Schranke:

$$(157) \quad x_{\min} \sim \frac{5,3 (1+c_1)^2 |k'_a|}{\left(k'_a - \frac{1}{v_k} \right)^2}$$

$$(158) \quad x_{\min} \sim \frac{1,9 (1+c_1)^{3/2} k'''_m{}^{1/2}}{\left(k'_m - \frac{1}{v_k} \right)^{3/2}}.$$

Kürzere Distanzen hätte man hiernach als kurz, längere als lang bezüglich α zu bezeichnen. Bei letzteren ist die entwickelte asymptotische Theorie sicher vom Hauptübergang ab anwendbar. Andererseits gibt, wieder für ein bestimmtes Frequenzgebiet, die reziproke rechte Seite von (157), (158) ein Maß für die Stärke der Dispersion des Systems. Für sehr hohe Frequenzen wird dieselbe nach (157) bei Benutzung von (41) proportional zu $\frac{b_s}{2 v_k |\omega|}$; das steht in Einklang mit den Ergebnissen des Vorlaufs (§ 6), wonach dort die Dispersion die

mit $1/|\omega|$ wachsende Abweichung von $k(\omega)$ vom linearen Verlauf bedeutet.

Obgleich hier lange Distanzen, auf die sich die asymptotische Theorie bezog, der Fragestellung gemäß (vgl. § 5) das weit überwiegende Interesse besitzen, soll doch die Behandlung von kurzen wenigstens gestreift werden. Bei diesen ist es nicht etwa angängig, wie zuerst nahe läge, die Vorlaufentwicklung entsprechend weit auszudehnen. Denn diese geht, wie in § 6 gezeigt, von den sehr hohen Frequenzen aus; da aber hier $T_a > T_a$ ist, sind bei bzw. nicht lange vor T_a für den Signalverlauf sicher die meisten und vor allem die im Signalspektrum am stärksten vertretenen Frequenzen maßgeblich; mathematisch würde sich das so äußern, daß dann die Vorlaufentwicklung in t (41) äußerst schlecht konvergent wäre. Es erscheint vielmehr sinngemäß, bei kurzen Distanzen zwischen Vorlauf und die erst zu verhältnismäßig späten Zeiten brauchbare asymptotische Entwicklung eine nach Potenzen von x fortschreitende einzuschalten, die hier den Hauptabschnitt des Signalverlaufs in handlicher Weise beschreiben würde.

Man kommt zu einer solchen durch Anwendung der in § 7 unter II. genannten Methode der Zerlegung in das Residuenintegral P_a (78) und die um die Verzweigungsschnitte (S -Gebiete) S_μ herumlaufenden Integrale J_μ . Dadurch, daß hierbei von Anfang an das stationäre Glied P_a auftritt, wird das Fehlen einer eigentlichen Signalzeit dokumentiert. Die „Eigenschwingungen“ J_μ :

$$(159) \quad J_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(S_\mu)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega - \alpha} d\omega$$

lassen sich prinzipiell folgendermaßen berechnen: Bezeichnet man die zu S_μ gehörigen Grenzfrequenzen mit $\omega_{N\mu}$ und $\omega_{Z\mu}$, so kann man nach §§ 3, 4 schreiben:

$$(160) \quad k = -ik_\mu(\omega) \sqrt{\frac{\omega_{Z\mu} - \omega}{\omega - \omega_{N\mu}}},$$

wobei $k_\mu(\omega)$ in S_μ und innerhalb der beiden angrenzenden D -Gebiete überall eindeutig und singularitätenfrei und auf der

reellen Achse reell und positiv ist. k_μ kann also von irgend-einer in einem gewissen Gebiet um

$$(161) \quad \omega_{M\mu} = \frac{\omega_{Z\mu} + \omega_{N\mu}}{2}$$

gelegenen Stelle $\omega_{0\mu}$ aus in eine in ganz S_μ absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe entwickelt werden. — Man entwickelt nun (160):

$$(160a) \quad J_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(S_\mu)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} \left(1 - i k x - \frac{k^2 x^2}{2!} \dots \right) d\omega.$$

Hieraus folgt formal durch gliedweise Integration die gesuchte Potenzentwicklung nach x :

$$(162) \quad J_\mu = c_{1\mu} x + c_{2\mu} x^2 + c_{3\mu} x^3 \dots; \quad c_{k\mu} = c_{k\mu}(t)$$

mit

$$\begin{aligned} c_{2n+1;\mu} &= \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{\partial^{(2n+1)} J_\mu}{\partial x^{2n+1}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{i}{2\pi(2n+1)!} \oint_{(S_\mu)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} k_\mu^{2n+1}(\omega) \left[\frac{\omega_{Z\mu} - \omega}{\omega - \omega_{N\mu}} \right]^{n+1/2} d\omega. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (162) und Zulässigkeit der gliedweisen Integration folgt daraus, daß $c_{2n+1;\mu}$ im limes wie $\frac{1}{(2n)!}$ abnimmt, wie sich alsbald zeigen wird. — Da k^2 eine eindeutige Funktion ist, verschwinden in (162) alle c mit geradem Index außer $c_{2\mu}$, das durch das Residuum R_μ von k^2 bei $\omega_{N\mu}$ geliefert wird:

$$(163) \quad \begin{cases} c_{4\mu} = c_{6\mu} = c_{8\mu} \dots = 0; & c_{2\mu} = -\frac{R_\mu e^{i\omega_{N\mu} t}}{2! (\omega_{N\mu} - \alpha)}; \\ R_\mu = -(\omega_{Z\mu} - \omega_{N\mu}) k_\mu^2(\omega_{N\mu}). \end{cases}$$

In diesem Sinne kann man die Frequenzen $\omega_{N\mu}$ als „Eigenfrequenzen“ ansehen, wie ein an anderer Stelle durchgeführtes physikalisches Beispiel aus der Drudeschen Dispersionstheorie bestätigt. Für die ungeraden Indizes erhält man:

$$(164) \left\{ \begin{aligned} c_{2n+1; \mu} &= \frac{i}{2\pi(2n+1)!} \oint_{(S_\mu)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} k_\mu^{2n+1}(\omega) \left[\frac{\omega_{Z\mu} - \omega}{\omega - \omega_{N\mu}} \right]^{n+1/2} d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi(2n+1)!} \oint_{(S_\mu)} G_\mu(\omega) \left[\frac{\omega_{Z\mu} - \omega}{\omega - \omega_{N\mu}} \right]^{n+1/2} d\omega \\ \text{mit } G_\mu(\omega) &= \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} k_\mu^{2n+1}(\omega). \end{aligned} \right.$$

Die Auswertung von (164) geschieht praktisch mittels halbzahliger B -Funktionen (vgl. L 16). Mit der Substitution:

$u = \frac{\omega - \omega_{N\mu}}{\omega_{Z\mu} - \omega}$ erhält man:

$$(164a) \left\{ \begin{aligned} c_{2n+1; \mu} &= \frac{i}{2\pi} \frac{\omega_{Z\mu} - \omega_{N\mu}}{(2n+1)!} \oint_{(0;1)} G_\mu \\ &\quad \cdot (\omega_{N\mu} + (\omega_{Z\mu} - \omega_{N\mu})u) \left(\frac{1-u}{u} \right)^{n+1/2} du. \end{aligned} \right.$$

Denkt man sich hierin G_μ von $\omega_{M\mu}$ (161), d. h. $u = \frac{1}{2}$ aus entwickelt, so kann man (164a) durch gliedweise Integration berechnen. Man erhält dann Integrale von der Form:

$$(165) \left\{ \begin{aligned} \oint_{(0;1)} \left(\frac{1+u}{u} \right)^{n+1/2} u^k du &= 2B\left(n + \frac{3}{2}; n + \frac{1}{2} + k\right) \\ &= 2 \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-n + \frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma(k+2)} \\ &= (-1)^{n-k} 2\pi \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(n - k + \frac{1}{2}\right)}{(k+1)!} \\ &= (-1)^{n-k} \frac{2\pi}{k+1} \binom{n+1/2}{k} \end{aligned} \right.$$

(vgl. L 16); speziell für $k=0$:

$$(165a) \quad \oint_{(0;1)} \left(\frac{1-u}{u} \right)^{n+1/2} du = (-1)^n 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Auf die Ausrechnung im einzelnen wird nunmehr verzichtet; hingewiesen sei nur auf die Form des Ergebnisses. Dabei sei berücksichtigt, daß $G_\mu(\omega)$ in (164) allgemein von einer beliebigen geeigneten in einer gewissen Umgebung von

$\omega_{M\mu}$ gelegenen Stelle $\omega_{0\mu}^{(n)}$ entwickelt werden kann (vgl. oben); in (164a) ist speziell $\omega_{M\mu}$ selbst gewählt. Es wird dann allgemein:

$$(166) \quad c_{2n+1;\mu} = i(-1)^n \frac{n + \frac{1}{2}}{(2n+1)!} \frac{k_{0\mu}^{(n)} e^{i\omega_{0\mu}^{(n)} t}}{\omega_{0\mu}^{(n)} - \alpha} g_{0\mu}^{(n)}(t),$$

worin $k_{0\mu}^{(n)} = k_{\mu}^{2n+1}(\omega_{0\mu}^{(n)})$ und $g_{0\mu}^{(n)}(t)$ das in Form einer gleichmäßig konvergenten Reihe erscheinende Resultat der gliedweisen Integration bedeutet. Als Gesamtergebnis erhält man also:

$$(167) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= P_a + \sum_{\mu=1}^{2r} J_{\mu} \quad [2r = \text{Grad von } N(\omega)]; \\ J_{\mu} &= -\frac{R_{\mu} e^{i\omega_{N\mu} t}}{\omega_{N\mu} - \alpha} \cdot \frac{x^2}{2!} \\ &\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{n + \frac{1}{2}}{(2n+1)!} \frac{k_{0\mu}^{(n)} e^{i\omega_{0\mu}^{(n)} t}}{\omega_{0\mu}^{(n)} - \alpha} g_{0\mu}^{(n)}(t) \cdot x^{2n+1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Form deutet eine Verallgemeinerung der Heaviside'schen Entwicklungsformel auf verzweigte Stammfunktionen (vgl. L 3) an; allerdings ist der Begriff der „Eigenfrequenzen“ hier nur für die Frequenzen $\omega_{N\mu}$ evident, da die $\omega_{0\mu}^{(n)}$ in einem endlichen Gebiet kontinuierlich verteilt und beliebig wählbar liegen.

Für sehr einfache mittelkurze Systeme sei noch auf ein viel elementareres — allerdings hauptsächlich bei diskontinuierlichen Systemen zweckmäßiges — Integrationsverfahren hingewiesen, bei dem der ursprüngliche Weg längs (unterhalb) der reellen Achse beibehalten und dabei der Beitrag der S -Gebiete vernachlässigt wird. Die Integrale längs der D -Gebiete werden dann einfach durch lineare Annäherung von $k(\omega)$ genommen, führen also auf den Integralsinus. Hierzu sei auf Küpfmüller (L 12) verwiesen, der zuerst so vorgegangen ist.

In dem besonders einfachen Fall, daß bei $\rho = 1$ $R(\omega)$ eine ganze Funktion zweiten Grades ist [„homogener Kettenleiter von 1 Freiheitsgrad“], kann das Grundintegral (29) bei

beliebigen Werten von x , t mittels Besselscher Funktionen ausgewertet werden; wir übergehen hier die einfache Ausrechnung, da dieser Fall, der bei der Frage der Verzerrung drahtloser Zeichen in der Heavisideschicht eine Rolle spielt, an anderer Stelle behandelt werden soll. Das Analoge ist bei diskontinuierlichen Systemen der Fall (vgl. L. 3, S. 123 f).

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf lange Distanzen.

§ 14. Übertragung auf verlustfreie Kontinua ohne Latenzzeit

(Quasistationäre Näherung)

Die Ergebnisse der §§ 6—13 lassen sich, da sie vom Grad ρ von $k(\omega)$ (28) nicht abhängen, sofort auf Kontinua übertragen, bei denen $\rho = 0$ oder $\rho = -1$ ist, abgesehen von den Aussagen, die sich auf das D_∞ -Gebiet bzw. den Vorlauf bezogen, da hier $\rho = 1$, nach § 6 mit der Latenzzeitbedingung identisch, wesentlich war. Die Vorlaufentwicklung (44), (46), (47) überträgt sich aber — nach entspr. Umbenennung der eingehenden Koeffizienten — ihrer Herleitung gemäß unmittelbar auf die Fälle $\rho = 0$ und $\rho = -1$, wenn man t an Stelle von $t = t - t_0$ schreibt: Das Signal setzt wegen der quasistationären Näherung: $v_k = \infty$ [(42)] auch für $x \neq 0$ mit $t = 0$ ein. Allerdings besteht ein wesentlicher Unterschied: Der hinzutretende Faktor (48) $e^{-\text{const } x}$, der dort nur durch Dämpfungsverluste veranlaßt sein konnte, also nach Voraussetzung von relativ geringer Wirkung war, kann hier durch Energie-reflexion verursacht und dann ausschlaggebend werden; das ist der Fall, wenn $\omega = \infty$ in einem S-Gebiet liegt. Dann hat infolge des Ausfalls des D_∞ -Gebietes der *gesamte* Signalverlauf eine Quasilatenzzeit, nämlich die kleinste aller D-Gebiete.

Zwecks Übersicht über alle diesbezüglichen Möglichkeiten sei zunächst der Fall $\rho = 0$ betrachtet. Hier ist: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} R(\omega) = C$; im Falle $C > 0$ ist $\omega = \infty$ in einem D-Gebiet, bei $C < 0$ in einem S-Gebiet gelegen. Die höchste Grenzfrequenz ist dann in einen Falle eine Stelle ω_Z , im anderen eine Stelle ω_N ; da hier gleich viel von beiden Arten vorhanden sind, muß $\omega = 0$ ebenfalls in einem D-Gebiet bzw. S-Gebiet liegen, das, falls

$\omega = 0$ Doppelpol oder Doppelwurzel ist, auf 0 zusammenschrumpft. Im Falle $C > 0$ setzt das Signal sofort mit merklicher Amplitude und einer zu x proportionalen Phasenverschiebung ein, bei $C < 0$ erst zur kleinsten Quasilatenzzeit. [Zum Verlauf des Sattelpunktweges sei noch bemerkt, daß im Falle einer höchsten Grenzfrequenz ω_N die Fortsetzung des Gefälleweges ins Unendliche von dort über einen der beiden Nebensattelpunkte (Fig. 9) führt, und zwar, wie man zeigt, über den in der oberen Halbebene des unteren Blattes gelegenen — der Weg durch ∞ läuft dann also wie hier die Hälfte des Vorlaufweges im unteren Blatt! Praktisch ist der Nebensattelpunkt wegen seines exponentiell verschwindenden Beitrages ohne Bedeutung]. Bei $\rho = -1$ ist ein Paar Grenzfrequenzen ω_N mehr vorhanden als ω_Z , so daß $\omega = \infty$ in einem S-Gebiet, $\omega = 0$, falls keine Doppelwurzel oder Doppelpol, in einem D-Gebiet liegt. Da indessen hier $\lim_{\omega \rightarrow \infty} R(\omega) = 0$ ist, fällt der

Dämpfungsfaktor beim Vorlauf fort, so daß in genügender Tiefe x zur Zeit $t = 0$ sofort eine kleine aber merkbare Amplitude anklingt, indessen rasch wieder bis auf exponentiell kleine Werte verklingt; erst nach der endlichen Zeit $(t_m)_{\min}$ kommt sie wieder zu merkbaren Werten. Man kann sich dieses Verhalten daraus erklären, daß der Fall $\rho = -1$ nach (20) asymptotisch einer kontinuierlichen Kondensator-kette äquivalent ist; diese wirkt im Gegensatz zu ihrem diskontinuierlichen Schwestergebilde für die höheren Frequenzen sperrend, bei sehr hohen Frequenzen aber geht die Sperrwirkung wegen der „Kondensatorwirkung“ gegen 0. — Physikalisch dürfte der Fall $\rho = -1$ bei kontinuierlichen Systemen, auch näherungsweise, nur schwer zu realisieren sein.

Zusammenfassung

Es läßt sich zeigen, daß linear-homogene dispergierende Systeme allgemein die Eigenschaft haben, daß ihr Fortpflanzungsmaß als komplexe Funktion nur Verzweigungsstellen 2. Ordnung hat. Physikalisch bedeutet das bei Verlustfreiheit die abwechselnde Folge von Intervallen längs der reellen Frequenzachse, in denen entweder nur harmonische oder nur exponentielle Wellenfortpflanzung stattfinden kann, von soge-

nannten Durchlässigkeits- und Sperrgebieten. Speziell für kontinuierliche Systeme, den besonderen Gegenstand dieser Arbeit, lassen sich einige fundamentale Dispersionssätze beweisen, die viel weitergehende Aussagen über das Fortpflanzungsmaß derselben machen. Auf Grund deren ist es möglich, eine allgemeine Theorie der Ausbreitung von nichtstationären Vorgängen (Signalen) in solchen Systemen zu entwickeln. Dabei ist von besonderem Interesse der asymptotische Charakter der Dispersionsverzerrungen, der bei genügend starker Dispersion bzw. nicht zu geringer Eindringtiefe für die Signalfortpflanzung maßgeblich ist. Er ist physikalisch durch eine Aufspaltung des Signals in seine Spektralkomponenten gekennzeichnet, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Mit der Kopfgeschwindigkeit pflanzen sich nur die sehr hohen Frequenzen fort und bewirken dadurch die — bis auf einen eventuellen Dämpfungsfaktor — unverzerrte Fortpflanzung des Signalkopfes. Bei allen anderen gibt diese Aufspaltung Veranlassung zur Ausbildung einer „Signalgeschwindigkeit“, die kleiner als die Kopfgeschwindigkeit ist und speziell in den hier behandelten verlustfreien Systemen identisch mit der Gruppengeschwindigkeit ist, ferner bei Signalen mit plötzlich einsetzender stationärer Frequenz zu einer Frontverflachung bzw. Aufschaukelzeit. Allgemeine Aussagen über die Signalgeschwindigkeiten der verschiedenen Partialfrequenzen machen die fundamentalen Dispersionssätze. Aus ihnen ergibt sich insbesondere, daß jedes Durchlässigkeitsgebiet eine sogenannte „Quasilatenzzeit“ besitzt, vor der der Beitrag aller seiner Frequenzen zum Signalablauf verschwindend klein ist.

Die allgemeine Theorie gibt die quantitative Definition dieser für die Signalfortpflanzung charakteristischen Größen und liefert für dieselben einfache Formeln sowie einfache analytische Ausdrücke für den asymptotischen Signalablauf zu jeder beliebigen Zeit; diese beziehen sich auf (im eingangs genannten Rahmen) beliebige Systeme, sind aber auf den Einzelfall unmittelbar anwendbar. Endlich ist es möglich, den Begriff der „Distanz“ in einem System bzw. seiner „Dispersion“ im asymptotischen Sinne zu definieren. Die „kurzen“ Distanzen, deren Behandlung u. U. rechnerisch komplizierter, aber im Wesen elementarer ist, werden hier nur gestreift.

Die mathematische Durchführung liegt ausschließlich auf funktionentheoretischem Gebiet; speziell wird weitgehend von der Methode der Sattelpunktsintegration, größtenteils in der hier verallgemeinerten Form, Gebrauch gemacht.

Es bedeutet für mich eine besondere Freude, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Noether, Breslau, für zahlreich empfangene Anregung und Unterstützung meinen tiefsten Dank sagen zu können.

Literatur

- 1) L. Brillouin, Ann. d. Phys. [4], **44**. S. 177. 1914.
- 2) G. A. Campbell, The Bell Syst. Techn. Journ., Nov. 1922.
- 3) J. R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung (übers. v. Ollendorf u. Pohlhausen). Springer 1929.
- 4) W. Cauer, Arch. f. Elektrot. **17**. H. 4. 1926.
- 5) W. Cauer, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. **33**. 1927.
- 6) W. Cauer, E.N.T. **6**. S. 272. 1929.
- 7) Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik. Springer 1925.
- 8) P. Debye, Math. Ann. **67**. S. 535. 1909.
- 9) H. Edler, Arch. f. Elektrot. **23**. S. 1. 1929.
- 10) K. Försterling, Lehrbuch der Optik. Hirzel 1928.
- 11) R. M. Foster, The Bell Syst. Techn. Journ., April u. Juli 1924.
- 12) K. Küpfmüller, E.N.T. **1**. S. 141. 1924.
- 13) K. Küpfmüller, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern **5**. S. 51. 1926.
- 14) K. Küpfmüller, E.N.T. **5**. S. 18. 1928.
- 15) W. P. Mason, The Bell Syst. Techn. Journ. **6**. S. 258. 1927.
- 16) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Teubner 1906.
- 17) F. Noether, in Riemann-Weber, Differential- und Integralgleichungen der Physik, **2**. Abschn. 3. Vieweg 1927.
- 18) F. Ollendorff, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. Springer 1926.
- 19) F. Pollaczek, E.N.T. **1**. S. 80. 1924.
- 20) F. Pollaczek, E.N.T. **2**. S. 197. 1925.
- 21) F. Pollaczek, Zsr. f. techn. Phys. **9**. S. 265. 1928.
- 22) F. Pollaczek, Ann. d. Phys. [5] **2**. S. 991. 1929.
- 23) E. J. Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, Teubner 1908.
- 24) S. Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen. Teubner 1908.
- 25) A. Sommerfeld, Heinrich-Weber-Festschrift S. 338. 1912.

Fortpflanzung von Signalen in dispergierenden Systemen 369

- 26) A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* [4] **44**. S. 177. 1914.
- 27) A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* [4] **28**. S. 665. 1909.
- 28) A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* [4] **81**. S. 1153. 1926.
- 29) A. Sommerfeld, Riemann-Weber, *Differential- und Integralgleichungen der Physik*, **2**. Abschn. 4. Vieweg 1927.
- 30) G. W. Stewart, *Phys. Rev.* **20**. S. 528. 1922.
- 31) G. W. Stewart, *Phys. Rev.* **25**. S. 90. 1925.
- 32) Strecker u. Feldkeller, *Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern*, **8**. S. 2. 1929.
- 33) Strecker u. Feldkeller, *E.N.T.* **6**. S. 93. 1929.
- 34) Trendelenburg, Lübecke, *Handbuch d. Physik*, **8**. Kap. 13 bzw. 15.
- 35) K. W. Wagner, *Arch. f. Elektrot.* **2**. S. 315. 1915.
- 36) K. W. Wagner, *Arch. f. Elektrot.* **4**. S. 172. 1916.
- 37) K. W. Wagner, *Arch. f. Elektrot.* **8**. S. 61. 1919.
- 38) K. W. Wagner, *Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern* **2**. S. 189. 1922.
- 39) K. W. Wagner, *E.N.T.* **5**. S. 1. 1928.
- 40) F. Wallot, *Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern* **8**. 1929.
- 41) H. Weyl, *Ann. d. Phys.* [4] **60**. S. 481. 1919.

(Eingegangen am 6. Juni 1930)

Über die thermodynamische Behandlung stationärer Zustände in nicht isothermen Systemen II

Berichtigung und Ergänzung

Von Carl Wagner

(Mit 1 Figur)

§ 1. Verteilung hinzugebrachter Ladungen bei elektrischer Aufladung von flüssigen oder festen Phasen

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ wurde auf einige Fragen der elektrischen Doppelschicht kondensierter Phasen gegen das Vakuum eingegangen. Es wurde durch thermodynamische Überlegungen abgeleitet, daß der elektrische Potentialsprung an der Oberfläche unabhängig von der Gegenwart kapillaraktiver Stoffe sein solle, falls die betrachtete Phase sich im streng elektroneutralen Zustand befände.²⁾ Aus dieser Behauptung und der Erfahrungstatsache, daß der Potentialsprung im nicht streng elektroneutralen Zustand in erheblichem Maße mit durch die Zusammensetzung der Oberflächenschicht bestimmt ist, mußte damals gefolgert werden, daß der Potentialsprung wesentlich von der Aufladung mit abhängen müßte. Auf die Unwahrscheinlichkeit dieser Auffassung wurde ich von verschiedenen Seiten aufmerksam gemacht, insbesondere auch von Hrn. E. Lange in München gelegentlich einer eingehenden Diskussion über einschlägige Fragen, ohne daß zunächst die fehlerhafte bzw. praktisch nicht zutreffende Annahme meiner Beweisführung gefunden werden konnte.

Bei der Ableitung wurde angenommen, daß bei sehr geringer Aufladung einer streng elektroneutralen Phase die hinzukommende Ladung sich praktisch im Inneren gleichmäßig verteile, während erst bei höherer Aufladung der Satz der gewöhnlichen Elektrostatik gilt, daß die gesamte freie Ladung

1) C. Wagner, Ann. d. Phys. [5] 3. S. 629. 1929.

2) A. a. O., S. 633.

im wesentlichen an der Oberfläche lokalisiert ist.¹⁾ Die Annahme der praktisch gleichmäßigen Verteilung hinzugebrachter Ladungen in einer zunächst streng neutralen Phase ist jedoch tatsächlich *nicht allgemein* zutreffend²⁾, wenn nämlich eine spezifische Ionenadsorption an der Oberfläche vorliegt. Dies soll nachfolgend an Hand eines speziellen Modelles gezeigt werden. Die Voraussetzungen sind hierbei so gewählt, daß die Rechnung möglichst einfach wird, jedoch ohne Rücksicht auf die Untersuchung wichtiger realer Fälle. Die Rechnungen suchen ferner unmittelbar Anschluß an die Arbeiten von Gouy³⁾, D. L. Chapman⁴⁾, K. F. Herzfeld⁵⁾ und O. Stern.⁶⁾

Gegeben sei eine idealverdünnte Lösung eines einwertigen Elektrolyten von der Konzentration c (in Mol pro Kubikzentimeter); das Stoffsymbol der Kationen sei 1, das der Anionen 2. Die Kationen sollen als stark adsorbierbar an der Oberfläche angenommen werden, während die Adsorption der Anionen zu vernachlässigen sein möge. Nach dem Inneren zu wird dann eine diffuse Doppelschicht auftreten. Die adsorbierte Menge der Kationen (in Mol pro Quadratcentimeter) *unmittelbar* an der Oberfläche (also unter Ausschluß der diffusen Doppelschicht) sei mit α_1 bezeichnet.

Es sei angenommen, daß die Konzentrationen der Ionen an allen Stellen so klein sind, daß die Gesetze der idealverdünnten Lösungen auch in der Doppelschicht gelten. Dann ist für die Konzentrationen c_1 und c_2 der Kationen und Anionen in der diffusen Doppelschicht (jedoch ausschließlich der Adsorptionsschicht *unmittelbar* an der Oberfläche) gemäß dem Boltzmannschen Satz zu setzen:

$$(1a) \quad c_1 = c \cdot e^{-\frac{F(\varphi - \varphi_i)}{RT}},$$

$$(1b) \quad c_2 = c \cdot e^{+\frac{F(\varphi - \varphi_i)}{RT}}.$$

1) A. a. O., S. 633.

2) Zu denselben Folgerungen gelangen auch E. Lange und K. F. Miščenko, Ztschr. f. phys. Chem., A 149. S. 1. 1930.

3) G. Gouy, Compt. rend. 149. S. 654. 1909; Journ. de phys. [4] 9. S. 457. 1910.

4) D. L. Chapman, Phil. Mag. [6] 25. S. 475. 1913.

5) K. F. Herzfeld, Phys. Ztschr. 21. S. 28. 1920.

6) O. Stern, Ztschr. Elektrochem. 30. S. 508. 1924.

Hierin bedeutet c die Elektrolytkonzentration im Inneren [vgl. oben], F das elektrochemische Äquivalent, $\varphi - \varphi_i$ die elektrische Potentialdifferenz gegen das Flüssigkeitsinnere (Funktion des Abstandes von der Oberfläche), R die Gaskonstante und T die Temperatur.

Ferner sei angenommen, daß die adsorbierte Menge a_1 relativ klein sei, so daß diese proportional der Konzentration

im Inneren sowie einem Faktor $e^{-\frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}}$ gesetzt werden kann. Hierin bedeutet $(\varphi_a - \varphi_i)$ die Potentialdifferenz des äußersten Randes der Lösung gegen das Innere.

$$(2) \quad a_1 = \alpha_1 \cdot c \cdot e^{-\frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}}.$$

Der Faktor α_1 ist der Adsorptionskoeffizient, wie er gelten würde, wenn keine elektrischen Kräfte zu berücksichtigen wären. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Reichweite der Adsorptionskräfte so klein ist, daß von einer scharfen Trennung zwischen dem eigentlichen Adsorptionsraum und dem diffusen Anteil der Doppelschicht gesprochen werden kann und im Adsorptionsraum mit einem einheitlichen Wert des Potentials φ_a gerechnet werden kann. Für die Ladungsdichte pro Flächeneinheit der Adsorptionsschicht gilt weiter:

$$(3) \quad \eta_a = a_1 \cdot F = F \cdot \alpha_1 \cdot c \cdot e^{-\frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}}.$$

Für den Betrag der negativen Überschußladung ($-\eta_d$) der diffusen Doppelschicht pro Flächeneinheit ist nach der von Gouy¹⁾, D. L. Chapman²⁾, K. F. Herzfeld³⁾ sowie O. Stern⁴⁾ entwickelten Theorie zu setzen⁵⁾:

$$(4) \quad -\eta_d = \sqrt{\frac{c D R T}{2 \pi}} \cdot \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}} - e^{-\frac{1}{2} \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}} \right\}.$$

1) G. Gouy, a. a. O.

2) D. L. Chapman, a. a. O.

3) K. F. Herzfeld, a. a. O.

4) O. Stern, a. a. O.

5) Vgl. z. B. O. Stern, a. a. O., Gl. (2a) mit Ableitung auf S. 516; wegen eines drucktechnischen Fehlers ist in der dortigen Gl. (2a) noch ein Minuszeichen im Exponenten der zweiten e -Potenz zu ergänzen.

(D Dielektrizitätskonstante.) Bei der Ableitung dieser Formel wird nur die von den Ionen herrührende Ladungsverteilung und der entsprechende Potentialgang berechnet; die Effekte, die von einer Orientierung der Dipole des Lösungsmittels an der Oberfläche herrühren, bleiben unberücksichtigt. Ferner wird von den abstoßenden Kräften abgesehen, die eine elektrische Ladung in einem Medium hoher Dielektrizitätskonstante an einer Grenzfläche gegen ein Medium mit niedriger Dielektrizitätskonstante erfährt.¹⁾

Gl. (4) gilt zunächst nur für ebene Oberflächen, ist aber auch für Kugeloberflächen verwendbar, wenn der Kugelradius r genügend groß gegen die mittlere Dicke der diffusen Doppelschicht ist, was für das folgende angenommen werden soll. Die Summe $(\eta_a + \eta_d)$ gibt die Überschußladung pro Flächeneinheit an und für eine Kugel vom Radius r wird demgemäß die gesamte Überschußladung gleich $4\pi r^2(\eta_a + \eta_d)$ und diese muß gleich der mit dem elektrochemischen Äquivalent F multiplizierten Differenz der Molzahlen der positiven und negativen Ionen sein ($\Delta n = n_1 - n_2$).

$$(5) \quad 4\pi r^2(\eta_a + \eta_d) = F \cdot \Delta n.$$

Aus (3), (4) und (5) lassen sich die Größen η_a und η_d eliminieren und die Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_i$ sowie die pro Flächeneinheit adsorbierte Menge α_1 berechnen. Explizite Lösungen lassen sich nur unter speziellen Annahmen geben, je nachdem $\frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}$ groß oder klein gegen 1 ist.

1. Hier interessiert vorzugsweise der Fall:

$$(6) \quad \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT} \gg 1.$$

Dann ist in (4) das 2. Glied innerhalb der Klammer zu vernachlässigen und man erhält zunächst die durch den Index⁽⁰⁾ gekennzeichneten speziellen Lösungen für $\Delta n = 0$:

$$(7) \quad \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)^{(0)}}{RT} = \frac{1}{3} \ln \frac{2\pi F^2 c \alpha_1^2}{DRT}$$

$$(8) \quad \alpha_1^{(0)} = \left(\frac{c^3 \alpha_1 DRT}{2\pi F^2} \right)^{1/3}.$$

1) Vgl. C. Wagner, Physik. Ztschr. 25. S. 474. 1924.

Für die allgemeine Lösung einer elektrisch nicht neutralen Phase ($\Delta n \neq 0$) werde $(\varphi_a - \varphi_i) = (\varphi_a - \varphi_i)^{(0)} + \Delta(\varphi_a - \varphi_i)$ gesetzt und angenommen, daß $\frac{\Delta(\varphi_a - \varphi_i)}{R T}$ klein gegen eins sei.¹⁾ Dann kann man entwickeln:

$$(9) \quad e^{-\frac{3}{2} \frac{F \Delta(\varphi_a - \varphi_i)}{R T}} \cong 1 - \frac{3}{2} \frac{F \Delta(\varphi_a - \varphi_i)}{R T}.$$

Mit dieser Vereinfachung erhält man aus (3), (4) und (5) mit entsprechenden Substitutionen die allgemeinen Lösungen:

$$(10) \quad \varphi_a - \varphi_i = (\varphi_a - \varphi_i)^{(0)} - \frac{2}{3} \frac{\Delta n}{4 \pi r^2} \cdot \left(\frac{2 \pi R^2 T^2}{c^2 \alpha_1 D F} \right)^{1/2},$$

$$(11) \quad \alpha_1 = \alpha_1^{(0)} + \frac{2}{3} \frac{\Delta n}{4 \pi r^2}.$$

Die auf der gesamten Oberfläche adsorbierte Menge \mathfrak{M}_1 ergibt sich somit zu:

$$(12) \quad \mathfrak{M}_1 = 4 \pi r^2 \alpha_1^{(0)} + \frac{2}{3} \Delta n.$$

Vorstehende Entwicklungen gelten, solange $\frac{F \Delta(\varphi_a - \varphi_i)}{R T} \ll 1$ ist. Bei einem Wert von $\alpha_1 = 10^{-4}$, $T = 300$, $c = 10^{-6}$ (Mol/cm), $D = 80$ und einem Kugelradius von 1 cm mit entsprechenden $(\varphi_i - \varphi_a)^{(0)} = 0,06$ (Volt) und $\alpha_1 = 10^{-11}$ (Mol/cm²) würde das bis etwa $\Delta n = 10^{-11}$ Mol zutreffen, was einer Aufladung auf 10^6 Volt entsprechen würde. Für makroskopische Dimensionen ist somit die Reihenentwicklung (9) durchaus hinreichend. Die aus (10) zu berechnende Änderung $\Delta(\varphi_a - \varphi_i)$ des Potentialsprungs an der Oberfläche würde sich auch bei einer Aufladung auf 10^6 Volt erst auf etwa $2 \cdot 10^{-3}$ Volt belaufen. Praktisch ist dieser Effekt natürlich gänzlich belanglos.

Von entscheidender Bedeutung ist jedoch, daß bei elektrischer Aufladung, etwa durch Zusatz von Kationen der Sorte 1, zwei Drittel von diesen von der äußeren Adsorptionsschicht aufgenommen werden²⁾, und zwar unabhängig von α_1 , solange Bedingung (6) erfüllt bleibt. Der Rest trägt zur Verminderung

1) Praktisch gleichbedeutend mit $\Delta n \ll 4 \pi r^2 \alpha_1^{(0)}$, d. h. Aufladung gering im Verhältnis zur Ladung in der Doppelschicht (vgl. unten).

2) Bei Zusatz andersartiger Kationen oder Wegnahme von Anionen wäre die Änderung in der Zusammensetzung der Oberflächenschicht praktisch die gleiche.

der negativen Ladung des diffusen Anteils der Doppelschicht bei. Dieser Effekt ergibt sich auch von der Größe der Phase (Kugelradius) völlig unabhängig, während sonst allgemein Oberflächeneffekte relativ zu Effekten im Phaseninneren durch Vergrößerung der Dimensionen herabgedrückt werden können, da das Volum bzw. die Masse mit einer höheren Potenz der linearen Ausdehnung als die Oberfläche wächst.

Betrachtet man die Vollkugel unter Ausschluß der Adsorptionsschicht der positiven Ionen, so kann man diese auffassen als eine Phase ohne Adsorptionserscheinungen mit einer erheblichen Überschußladung ($= 4 \pi r^2 \eta_d$), die in der Nähe der Oberfläche lokalisiert ist; in verdünnten Lösungen sind diese Ladungen noch außerhalb des Bereiches der Adsorptionsschicht.¹⁾ Auf Grund dieser Feststellung erscheint es durchaus plausibel, daß bei Hinzuführung von positiven Ladungen sich zunächst die Dichte der diffusen Doppelschicht um einen entsprechenden Betrag ändert, aber gleichzeitig ein gewisser Konzentrationsaustausch mit der äußeren Adsorptionsschicht stattfindet, der unter speziellen Voraussetzungen im Verhältnis 2:3 zur zugeführten Ladungsmenge steht. Dabei ändert sich die Potentialdifferenz in der Doppelschicht nicht wesentlich, solange die hinzukommende Ladung klein gegen die von vornherein in der Doppelschicht einander gegenüberstehenden Ladungen ist ($\Delta n \ll 4 \pi r^2 a_1^{(0)}$).

2. Wenn

$$(13) \quad \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT} \ll 1$$

kann an Stelle von (3) und (4) näherungsweise geschrieben werden

$$(3') \quad \eta_a = a_1 F \cong c \cdot F \cdot a_1 \cdot \left(1 - \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}\right)$$

$$(4) \quad -\eta_d \cong \sqrt{\frac{c D R T}{2 \pi}} \cdot \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)}{RT}.$$

1) Die Entfernung von der Oberfläche, in der die Potentialdifferenz auf den c -ten Teil abgenommen hat, ist der reziproke Wert der für die Debye-Hückelsche Elektrolyttheorie maßgebenden Größe:

$$\kappa = \sqrt{\frac{8 \pi c F^2}{D R T}}.$$

Zusammen mit (5) ergibt sich zunächst für $\Delta n = 0$:

$$(14) \quad \frac{F(\varphi_a - \varphi_i)^{(0)}}{RT} = \frac{c \cdot F \cdot \alpha_1}{c \cdot F \cdot \alpha_1 + \sqrt{\frac{c D R T}{2\pi}}} \cong F \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\frac{2\pi c}{D R T}}.$$

Analog wie oben folgt weiter für $\Delta n \neq 0$:

$$(15a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F \Delta(\varphi_a - \varphi_i)}{RT} &= - \frac{F \Delta n}{4\pi r^2} \cdot \frac{1}{c \cdot F \cdot \alpha_1 + \sqrt{\frac{c D R T}{2\pi}}} \\ &\cong \frac{F \Delta n}{4\pi r^2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{c D R T}}. \end{aligned} \right.$$

$$(15b) \quad \mathfrak{A}_1 = 4\pi r^2 a_1^{(0)} + \Delta n \cdot \left[F \cdot \alpha_1 \cdot \sqrt{\frac{2\pi c}{D R T}} \right].$$

Das bedeutet, daß die Vermehrung der an der ganzen Kugeloberfläche adsorbierten Ionen durch Aufladung klein ist gegen die insgesamt zugebrachte Menge, weil der in eckigen Klammern stehende Faktor von Δn in (15b) wegen (13) und (14) klein gegen 1 angenommen wird.

Für den Grenzfall verschwindender Adsorption findet sich natürlich im elektroneutralen Anfangszustand auch kein Potentialgefälle an der Oberfläche, da von Dipolorientierung hier ausdrücklich abgesehen werden soll. Bei hinreichend schwacher Aufladung findet dann tatsächlich eine gleichmäßige Verteilung der Ladungen im Inneren statt und erst bei stärkerer Aufladung kommt es zu einer Anreicherung von Ladungen in der Nähe der Oberfläche, wie im einzelnen bereits von Gouy¹⁾ berechnet.

In allen Fällen, wo die Annahme gleichmäßiger Ladungsverteilung bei Aufladung einer zunächst streng neutralen Phase nicht zutrifft, ist somit auch der frühere Beweis hinfällig, daß im streng elektroneutralen Zustande der Potentialsprung der elektrischen Doppelschicht an der Grenze kapillaraktiver Stoffe unabhängig sein solle. Im Gegensatz zu der früher angeführten Fig. 1 (a. a. O. S. 636) ist vielmehr anzunehmen, daß dieser Potentialsprung von der Gegenwart kapillaraktiver Stoffe wesentlich mit abhängt, aber praktisch unabhängig von dem

1) G. Gouy, a. a. O.

Grade der Aufladung ist, wenn man von einem schwach linearen Gang absieht, wie er etwa in Gl. (10) bzw. (15a) dieser Arbeit für ein spezielles Modell berechnet ist.

§ 2. Die Überführungswärmen elektrisch geladener Komponenten und der Temperaturkoeffizient des inneren elektrischen Potentials kondensierter Phasen

Unabhängig von den Ausführungen im § 1 ist die frühere Arbeit des Verfs. noch in folgendem Punkte zu ergänzen. Bei Ableitung der allgemeinen Bedingungen des stationären Zustandes in nichtisothermen Systemen wurde bereits in der vorhergehenden Arbeit¹⁾ die Möglichkeit offengelassen, daß hinzukommende Ladungen sich nicht gleichmäßig im Inneren verteilen, sondern im wesentlichen von der Oberflächenschicht aufgenommen werden. Für diesen Fall wurde gleichzeitig eine „Oberflächenelektrisierungswärme“ Q_{el} in die Gleichungen eingeführt. Diese wurde definiert als zuzuführende Wärmemenge bei reversilem und isothermem Übergang der Ladung F aus dem Phaseninneren an die Grenzfläche. Diese Größe dividiert durch $T \cdot F$ sollte stets additiv zu dem Temperaturkoeffizienten des inneren elektrischen Potentials $\partial \varphi / \partial T$ auftreten. Allgemein wurde somit für die Summe beider Größen erhalten²⁾:

$$(16) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{Q_{el}}{T \cdot F}.$$

Bei näherer Betrachtung stellt sich jedoch heraus, daß die beiden Summanden der rechten Seite von (16) entgegengesetzt gleichgroß sein müssen, wenn man nur die Definitionen der Größe Q_{el} sowie der „Überführungswärmen“ hinreichend präzisiert.³⁾

Dann aber ist das Glied $\partial \Phi / \partial T$ in allen früheren Gleichungen für das Potentialgefälle in nichtisothermen Phasen sowie

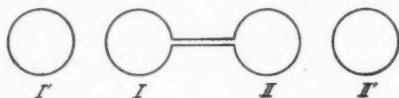
1) A. a. O. S. 644/646.

2) In der entsprechenden Formel (8b) a. a. O., S. 645 kommt das Zeichen z_j nur versehentlich vor und ist zu streichen, wie sich ohne weiteres aus den dortigen Gl. (8a) bis (8c) ergibt. — Früher wurde $\partial \Phi / \partial T$ als Temperaturkoeffizient des inneren elektrischen Potentials der streng elektroneutralen Phase gedeutet, was jedoch nach den folgenden Ausführungen nicht mehr aufrechtzuerhalten ist.

3) Für einen diesbezüglichen Hinweis bin ich Hrn. Dr. E. Lange, München, zu großem Dank verpflichtet.

für Peltier- und Thomsonwärmen zu streichen. Die Formeln stimmen nunmehr mit den früher von E. D. Eastman¹⁾ erhaltenen völlig überein. Dieses Ergebnis ist insofern sehr befriedigend, als jetzt unmittelbar ersichtlich ist, daß der Zustand der Oberfläche der betreffenden Phasen für die zu untersuchenden Phänomene völlig belanglos ist.

Der früheren Definition der Überführungswärmen sowie der Oberflächenelektrisierungswärme lag nämlich die (stillschweigende) Annahme zugrunde, daß nur die Verschiebung von Ladungen aus dem Inneren in die Oberfläche gewisse Wärmeeffekte zur Folge hat, während das Hineinbringen ins



Schematische Darstellung der Teilsysteme und Hilfssysteme zur Definition der Überführungswärme elektrisch geladener Bestandteile

Fig. 1

Innere (gleichgültig woher) ohne wesentliche Störung der Oberflächenschicht erfolgen sollte. Diese Annahme ist jedoch nicht zutreffend (vgl. unten).

Um von Veränderungen der Oberflächenschicht bei Aufladungsvorgängen unabhängig zu sein, sollen Überführungswärmen elektrisch geladener Bestandteile durch folgenden Prozeß definiert werden. Gegeben seien zwei aneinandergrenzende Teilsysteme I und II der zu untersuchenden Mischphase von gleicher Temperatur und sonst gleichen spezifischen Eigenschaften (vgl. Fig. 1). Als Ergänzung seien zwei unter sich gleichartige Hilfssysteme I' und II' beliebiger Art vorhanden, in denen der Bestandteil j die gleiche partielle Entropie s_j (d. h. ohne elektrischen Anteil²⁾: $-z_j F \frac{\partial \varphi}{\partial T}$ wie in I und II haben soll. Ferner soll $\partial \varphi / \partial T$ für die Hilfs-

1) E. D. Eastman, Journ. Amer. Chem. Soc. 50. S. 292. 1928. Durch obige Feststellungen erübrigen sich auch die früher mitgeteilten Bedenken gegen die von Eastman berechneten partiellen Entropien einzelner Ionensorten in wäßrigen Lösungen.

2) Vgl. unten Gl. (18).

systeme I' und II' gleich Null sein, was z. B. bei Gasphasen entsprechend geringer Ladungsdichte der Fall ist. Schließlich wird Gleichheit der Temperatur in I' und II' mit I und II verlangt.¹⁾ Als Überführungswärme Q_j^* soll dann diejenige Wärmemenge bezeichnet werden, die an (I + I') zuzuführen, von (II + II') wegzuführen ist, wenn ein Mol des Stoffes j von I' über I \rightarrow II nach II' quasistatisch überführt wird und jedes der Teilsysteme und Hilfssysteme auf konstanter Temperatur gehalten wird. Die Molzahlen aller Komponenten mit Ausnahme von j sollen hierbei für die einzelnen Teilsysteme erhalten bleiben.

Bei diesem Prozeß wird also der Ladungszustand der Phasen I und II mit temperaturabhängigem elektrischen Potential nicht verändert und infolgedessen treten auch keine diesbezüglichen Wärmeeffekte auf (näheres vgl. unten). Wird die Ableitung der allgemeinen Bedingungsgleichungen für den stationären Zustand in nicht isothermen Phasen im Sinne des § 4 der früheren Arbeit unter Hinzuziehung der eben benutzten Hilfssysteme I' und II' durchgeführt, so werden ohne weiteres dieselben Gleichungen wie früher, nur *ohne* das Glied $\partial \Phi / \partial T$ erhalten.²⁾

Es ist von Interesse, die Bilanz für den vorstehend zur Definition der Überführungswärmen benutzten Prozeß im einzelnen zu betrachten.³⁾

1) Im übrigen wird Gleichgewicht zwischen den Systemteilen I und I' bzw. II und II' nicht gefordert. Die Systemteile seien ferner so groß, daß die Intensitätsvariablen bei obigem Prozeß als konstant angesehen werden können. Andernfalls ist der Prozeß mit differentiellen Mengen auszuführen.

2) Diese Prozesse sind allerdings tatsächlich nur durchführbar, wenn die partielle Entropie s_j in Mischphasen auch wirklich angebar ist. Das ist allerdings heute noch nicht der Fall, da höchstens die Kombination $(s_j - z_j F \frac{\partial \varphi}{\partial T})$ meßbar scheint, während die Frage nach dem inneren Potential einer Phase sowie dessen Temperaturkoeffizienten durchaus offen ist.

3) Hierbei soll vorausgesetzt werden, daß die beiden Systemteile I und II in ihrer Hauptmenge so weit voneinander entfernt sind, daß elektrostatische Wechselwirkungen der Überschußladungen vernachlässigt werden können. Die Verbindung zwischen beiden Systemteilen soll also z. B. nur durch einen relativ langen und dünnen Zylinder hergestellt sein (vgl. Fig. 1).

a) Reversible Überführung von 1 Mol des Stoffes j von I nach II. Zuzuführende Wärmemenge:

$$\begin{aligned}\Delta Q^{(a)} &= -T s_j^{(I')} + T \frac{\partial S^{(I)}}{\partial n_j} = -T s_j^{(I')} - T \frac{\partial G}{\partial n_j \partial T} \\ &= -T s_j^{(I')} - T \frac{\partial}{\partial T} (\mu_j^{(I)} + z_j \mathbf{F} \varphi^{(I)}) \\ &= -T s_j^{(I')} + T s_j^{(I)} - z_j \mathbf{F} T \frac{\partial \varphi^{(I)}}{\partial T}.\end{aligned}$$

Hierin bedeutet G das thermodynamische Potential nach Gibbs, S die Entropie und μ_j das chemische Potential des zuzuführenden Stoffes nach Abzug des rein elektrischen Anteils.¹⁾

Von den zuletzt stehenden Gliedern sollen $s_j^{(I')}$ und $s_j^{(I)}$ nach Voraussetzung gleich sein, so daß allein übrigbleibt²⁾:

$$(17a) \quad \Delta Q^{(a)} = -z_j \mathbf{F} T \frac{\partial \varphi^{(I)}}{\partial T}.$$

b) Reversible Überführung von 1 Mol des Stoffes j von I nach II. Die zuzuführende Wärmemenge $\Delta Q^{(b)}$ ist zunächst unbekannt. Da aber die Summe von $\Delta Q^{(a)}$ und $\Delta Q^{(b)}$ gleich der Überführungswärme Q_j^* sein soll, folgt für die *reale Überführungswärme* L_j^* von I nach II:³⁾

$$(17b) \quad \Delta Q^{(b)} = L_j^* = Q_j^* + z_j \mathbf{F} T \frac{\partial \varphi^{(I)}}{\partial T}.$$

1) Vgl. z. B. W. Schottky u. H. Rothe, Handb. d. Experimentalphysik, Bd. 13, 2. Hälfte, S. 1 ff., Leipzig 1928.

2) Vgl. hierzu W. Schottky u. H. Rothe, Handb. d. Experimentalphysik, Bd. 13, 1. Hälfte, S. 15–17, Leipzig 1928.

3) Vgl. auch E. Lange u. K. F. Miščenko, a. a. O., Abschnitt VIII. Die Größe L_j ist prinzipiell meßbar, indem z. B. durch ein äußeres elektrisches Feld ein gewisser Elektrizitätstransport von einem Konduktor I nach einem solchen II bewirkt werden kann und die hierbei in I und II auftretenden Wärmeeffekte gemessen werden. Wegen der Kleinheit der möglichen Ladungsverschiebungen erscheint die Ausführung dieser Messung allerdings nicht möglich.

Andererseits läßt sich aus Messungen der Temperaturabhängigkeit der Elektronen bzw. der Ionenemission in das Vakuum die Kombination $\left(s_j - z_j \mathbf{F} \frac{\partial (\varphi_i - \varphi_a)}{\partial T} \right)$ exakt berechnen, wie an anderer Stelle im besonderen Hinblick auf Salzphasen näher angeführt werden soll. Mit diesem Wert und dem allerdings nur prinzipiell meßbaren Wert $(Q_j^* - z_j Q_{el})$ wäre dann eine Berechnung aller thermoelektrischen Effekte möglich.

c) Übergang des Stoffes j von II nach II' ist ohne Bedeutung für den Wärmeaustausch von (I + I').

Zur weiteren Klarstellung der Differenz zwischen realer Überführungswärme L_j^* und der Überführungswärme Q_j^* sei der Aufladungsprozeß einer kondensierten Phase näher betrachtet. Wenn dn_j Mol des Stoffes j mit der Wertigkeit z_j dieser Phase zugeführt werden sollen, so ist die hierbei auftretende Zunahme der Entropie S aus folgendem Ansatz zu entnehmen:

$$(18) \quad dS = - \frac{\delta^2 G}{\partial n_j \partial T} dn_j = - \frac{\partial}{\partial T} (\mu_j + z_j \mathbf{F} \varphi) dn_j \\ = \left(s_j - z_j \mathbf{F} \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right) dn_j.$$

Würde man den Stoff j in das Innere der Phase hineinbringen, ohne daß sich der innere elektrische Druck (vgl. unten) sowie die Konfiguration aller an der Oberfläche vorhandenen Ladungen einschließlich einer eventuell vorhandenen Dipolorientierung ändert, was natürlich ein rein fiktiver Prozeß ist, so würde hierbei eine Entropieänderung dS' auftreten, in der das zweite Glied des Klammersausdrucks der rechten Seite von (18) fehlt, da beim Heranbringen der hinzukommenden Ladungen an die Oberfläche und beim Durchschreiten der dort befindlichen Doppelschicht von elektrischen Gliedern nur die hier nicht interessierende rein elektrostatische Arbeit zu berücksichtigen ist.

$$(18') \quad dS' = - \frac{\partial \mu_j}{\partial T} dn_j = + s_j dn_j.$$

Der so erhaltene Zwangszustand (') möge dann aufgehoben werden. Dann wird das System in den normalen Gleichgewichtszustand übergehen, wobei die Zuführung einer gewissen Wärmemenge notwendig ist, die umgerechnet auf die Ladung $+ \mathbf{F}$ mit Q_{el} definitionsmäßig bezeichnet werden soll. Da nun

$$dS = dS' + \frac{z_j Q_{el}}{T} \cdot dn_j$$

sein muß, folgt weiter durch Vergleich von (18) und (18')¹⁾:

$$(19) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T} = - \frac{Q_{el}}{T \cdot \mathbf{F}}.$$

1) Durch Vergleich mit (16) folgt $\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0$, wie oben schon vorweggenommen.

Über die physikalische Bedeutung der Wärmemenge Q_{el} ¹⁾ sei folgendes bemerkt. Zunächst kann das innere Potential φ in zwei Teile zerlegt werden, nämlich den Potentialsprung in der Doppelschicht an der Oberfläche χ und das äußere Potential ψ ²⁾, so daß gilt:

$$(20a) \quad \varphi = \chi + \psi,$$

$$(20b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{\partial \chi}{\partial T} + \frac{\partial \psi}{\partial T}.$$

a) Diskussion des Gliedes $\partial \psi / \partial T$

Wenn das äußere elektrische Potential ψ nur von der Überschußladung der untersuchten Phase herrührt und die geometrische Form der Phase bei Temperaturänderung erhalten bleibt, ist die Größe von $\partial \psi / \partial T$ durch den thermischen Ausdehnungskoeffizienten der betreffenden Phase bei konstantem Druck ($\alpha = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}$) unmittelbar bestimmt, indem einfach die Änderung der elektrostatischen Kapazität in Rechnung zu stellen ist.

$$(21) \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{\alpha}{3} \cdot \psi.$$

Diese Größe kann sehr erhebliche Werte relativ zu $\partial \chi / \partial T$ annehmen. Z. B. folgt für $\alpha = 3 \cdot 10^{-4}$ und $\psi = 10\,000$ Volt der Wert $\partial \psi / \partial T = 1$ Volt/Grad, während für $\partial \chi / \partial T$ eine um 3 Zehnerpotenzen kleinere Größenordnung anzunehmen ist. Der $\partial \psi / \partial T$ entsprechende Anteil von Q_{el} kann durch folgende Vorstellung interpretiert werden. Eine Kugel mit einer gewissen Überschußladung steht infolge deren gegenseitiger elektrostatischer Abstoßung unter einem gewissen negativen Druck von der Größe $-\psi^2 / 8 \pi r^2$ bzw. $-e^2 / 8 \pi r^4$

1) Für Q_{el} wurde früher die Bezeichnung Oberflächenelektrisierungswärme benutzt. Wie die nachfolgenden Ausführungen zeigen, hängen zwar die zu Q_{el} beitragenden Wärmeeffekte mit Strukturänderungen der Oberfläche bzw. mit der Wirkung von Oberflächenladungen wesentlich zusammen, doch möge auf den in diesem Zusammenhange mißverständlichen Ausdruck Oberflächenelektrisierungswärme verzichtet werden.

2) In § 1 wurden statt dessen die provisorischen Bezeichnungen φ_i anstatt φ (inneres elektrisches Potential) und φ_a anstatt ψ (äußeres elektrisches Potential) benutzt. Obige Bezeichnungen in Übereinstimmung mit E. Lange u. K. F. Miščenko.

(e Größe der Überschußladung). Bei Erhöhung der Ladung wächst dieser negative Druck und es tritt eine gewisse Volumvergrößerung ein. Diese ist allerdings in Praxis außerordentlich klein, da auch die hinzukommenden Ladungsmengen sehr klein sind. (Eine absolute elektrostatische Ladungseinheit entspricht nur etwa $3 \cdot 10^{-15}$ elektrochemischen Äquivalenten.) Nach Umrechnung auf 1 F entspricht jedoch die bei der Volumausdehnung auftretende Dilatationswärme *quantitativ* dem Anteil des Gliedes $\partial \psi / \partial T$ an der gesamten Oberflächen-elektrisierungswärme. Auf die Wiedergabe der Rechnung im einzelnen sei verzichtet.

b) Diskussion des Gliedes $\partial \chi / \partial T$

Es ist ferner plausibel, daß der Übergang von Ladungen aus dem Inneren in die äußere Adsorptionsschicht (vgl. § 1) mit einem gewissen Wärmeaustausch verbunden sein wird, und dieser entspricht wenigstens teilweise dem Anteil des Gliedes $\partial \chi / \partial T$ an der Größe Q_{el} . Aber auch wenn keine bevorzugte Ionenadsorption vorliegt und die Aufladung relativ klein ist, so daß praktisch gar keine Ionenverschiebung an die Oberfläche stattfindet, ist ein endlicher Wert für Q_{el} vorhanden, falls $\partial \chi / \partial T \geq 0$ infolge Dipolorientierung an der Oberfläche. Bei Aufladung einer solchen Phase überlagert sich eine gewisse Feldstärke herrührend von den in das Phaseninnere gebrachten Ladungen über den Potentialsprung der Doppelschicht und bewirkt eine gewisse Umorientierung der dort befindlichen Dipole.¹⁾ Berechnet man für ein einfaches Modell den hierbei auftretenden Wärmeaustausch, so findet man ebenfalls quantitative Übereinstimmung mit der durch Gleichung (19) und (20b) ausgedrückten Forderung.

Nach Abschluß der hier wiedergegebenen Überlegungen wurde der Verfasser auf Arbeiten von P. Bridgman²⁾, sowie

1) Gerade auf diese Fernwirkung war bei der früheren Untersuchung nicht genügend geachtet worden.

2) P. Bridgman, Phys. Rev. [4] **14**. S. 306. 1919; **27**. S. 173. 1926; **31**. S. 90. 1928.

L. Tonks und I. Langmuir¹⁾ aufmerksam, die sich gleichfalls mit der Oberflächenelektrisierungswärme (surface heat of charging) befassen. Abgesehen von dem Formalismus der Behandlungsweise, scheint eine wesentliche Abweichung zu jenen Arbeiten darin zu bestehen, daß dort teilweise nicht hinreichend zwischen Wärmeeffekten bei quasistatischer und solchen bei stationären Vorgängen (z. B. Peltierwärme) unterschieden ist²⁾, zu deren quantitativer Erfassung erst die von E. D. Eastman³⁾ eingeführten Überführungswärmen die geeignete Grundlage bieten. Von einem Vergleich im einzelnen sei daher abgesehen.

§ 3. Berechnung der stationären Verdampfungswärme bei der Glühelktronenemission

In den letzten Jahren ist von einigen Forschern⁴⁾ diejenige Wärmemenge bestimmt worden, die einer Glühkathode für je ein Mol in das Vakuum emittierter Elektronen zur Konstanthaltung der Temperatur zuzuführen ist. Diese Größe, die als stationäre Verdampfungswärme der Elektronen bezeichnet werden kann, möge nachfolgend theoretisch berechnet werden. Zunächst läßt sich die quasistatische Verdampfungswärme bei konstantem Druck und konstantem φ_a für einen Bestandteil j ohne temperaturabhängige innere Energie ohne weiteres angeben zu⁵⁾:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} [L]_{p, \varphi_a} &= -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} (\mu_j^{(g)} - \mu_j - z_j F(\varphi - \psi)) \right] \\ &= u_j^{(g, 0)} + \frac{5}{2} R T - \mu_j + T \frac{\partial \mu_j}{\partial T} - z_j F(\varphi - \psi) \\ &\quad + T z_j F \frac{\partial (\varphi - \psi)}{\partial T}. \end{aligned} \right.$$

1) I. Langmuir, Phys. Rev. [2] **29**. S. 524. 1926; L. Tonks, Phys. Rev. [2] **32**. S. 284. 1928.; vgl. auch C. Davisson u. L. H. Germer, Phys. Rev. [2] **30**. S. 634. 1927; über spezielle Annahmen vgl. auch K. F. Herzfeld, Phys. Rev. [2] **35**. S. 248. 1930.

2) Vgl. hierzu auch W. Schottky und H. Rothe, a. a. O. S. 126.

3) E. D. Eastman, Journ. Amer. Chem. Soc. **48**. S. 1482. 1926; **50**. S. 283, 292. 1928.

4) Vgl. z. B. C. Davisson und L. H. Germer, Phys. Rev. [2] **20**. S. 300. 1922; **30**. S. 634. 1927; H. Rothe, Ztschr. f. Physik. **41**. S. 530. 1927. Weitere Literatur bei W. Schottky und H. Rothe, a. a. O. S. 131.

5) Vgl. W. Schottky und H. Rothe, a. a. O. S. 105. — Die im folgenden benutzten Bezeichnungen schließen sich eng an jene Darstellungen an.

$(u_j^{(g,0)})$ molare Energie in der Gasphase für $T = 0$; die Symbole μ_j usw. ohne besonderen Phasenindex beziehen sich auf die kondensierte Phase bei der Temperatur T . In (22) steckt jedoch der Betrag $R T$ zuviel, welcher der äußeren Arbeit des Gases bei der gewöhnlichen Verdampfung unter konstantem Druck entspricht. Andererseits ist die mittlere kinetische Energie der verdampfenden Teilchen um $\frac{1}{2} R T$ größer, als der mittleren kinetischen Energie im Gas bei dieser Temperatur entspricht, wenn der Emissionskoeffizient $= 1$, also der Reflexionskoeffizient $= 0$ ist und keines der herausfliegenden Elektronen zur Glühkathode zurückkehrt.

Ferner ist noch der Anteil der Überführungswärmen für die stationäre Nachlieferung der Elektronen an die Glühkathode zu berücksichtigen, ganz analog wie bei der Berechnung der Peltierwärme.¹⁾ Da die herauskommenden Elektronen im Sinne von Gleichung (22) auf dem äußeren Potential ψ bleiben sollen, ist hier für die Größe Q_{el} nicht der volle Betrag nach Formel (19) einzusetzen, sondern nur der $\partial(\varphi - \psi) / \partial T$ entsprechende Anteil:

$$Q_{el} (\psi \text{ const}) = - T \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\partial (\varphi - \psi)}{\partial T}.$$

Insgesamt ergibt sich also für die zuzuführende Wärmemenge für je ein Mol Elektronen bei der stationären Verdampfung:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} L' &= [u_{e-}^{(g,0)} - \mu_{e-} - z_{e-} \mathbf{F} (\varphi - \psi)] + 2 R T + T \frac{\partial \mu_{e-}}{\partial T} \\ &+ T z_{e-} \mathbf{F} \frac{\partial (\varphi - \psi)}{\partial T} - (Q_{e-}^* - z_{e-} Q_{el} (\psi \text{ const})) \\ &= [u_{e-}^{(g,0)} - \mu_{e-} + \mathbf{F} (\varphi - \psi)] + 2 R T - [T s_{e-} + Q_{e-}^*]. \end{aligned} \right.$$

Hiervon kann der erste Klammerausdruck aus der Beobachtung der Stärke des Elektronenemissionsstromes entnommen werden. Hierfür gilt die bekannte Formel:

$$(24) \quad i = \frac{2 \pi e m_e k^2}{h^3} \cdot g_{e-} \cdot T^2 e^{-\frac{u_{e-}^{(g,0)} - \mu_{e-} + \mathbf{F} (\varphi - \psi)}{R T}}.$$

1) Vgl. hierzu auch E. Lange und K. F. Miščenko, a. a. O., Abschnitt VIII.

Hierin bezeichnet i die elektrische Stromdichte in abs. elektrost. Ladungseinheiten/cm² · sec, ϵ die elektrische Elementarladung, m_e die Masse eines Elektrons, k die Boltzmannsche Konstante, h die Plancksche Konstante, g_e das statische Gewicht der emittierten Elektronen. Bei der Ableitung ist angenommen, daß der Reflexionskoeffizient = 0 ist, d. h. daß bei dem umgekehrten Vorgang des Auftreffens von Elektronen aus dem Gasraum auf die Oberfläche der emittierenden Phase praktisch keine Elektronen reflektiert werden.¹⁾

Der Zähler des Exponenten in (24), vielfach auch als Elektronen-Austrittsarbeit bezeichnet²⁾, läßt sich aus der Messung von i bei bekanntem T berechnen und ist zugleich auch der erste Klammerausdruck der letzten Zeile in (23). Bei metallischen Leitern ist dieses Glied $+ 2 R T$ im wesentlichen bestimmend, wie bereits in früheren theoretischen und experimentellen Untersuchungen gefunden wurde.³⁾

Für den letzten Klammerausdruck in (23) läßt sich noch das Integral $- T F \int_0^T \frac{\sigma}{T} dT$ einführen, worin σ die Thomsonwärme des betreffenden Metalls bedeutet. Das ergibt sich ohne weiteres aus Formel (36') der früheren Arbeit unter Abstrich des Gliedes $\partial^2 \Phi / \partial T^2$.

$$(25) \quad \sigma = \frac{Q_{e-}^*}{T \cdot F} - \frac{1}{F} \frac{\partial Q_{e-}^*}{\partial T} - \frac{c_{e-}}{F}$$

($c_{e-} = T \frac{\partial s_{e-}}{\partial T}$ partielle spezifische Wärme der Elektronen).

Das oben eingeführte Integral stellt sozusagen nichts anderes als den Anteil des betreffenden Metalls an der Peltierwärme mit einem beliebigen anderen Metall dar, da die Peltierwärmen bei metallischen Leitern allgemein als Differenzen zweier derartiger Integrale geschrieben werden können.

1) Diese Annahme scheint zur Zeit allerdings nur größenordnungsmäßig richtig zu sein; vgl. L. Nordheim, Phys. Ztschr. 30. S. 177. 1929.

2) Die Definition bei W. Schottky und H. Rothe (a. a. O. S. 29f.) weicht allerdings hiervon um das Glied $R T \ln g_e$ ab.

3) Vgl. hierzu W. Schottky und H. Rothe a. a. O. S. 126f. und S. 131f.

In der Form:

$$(26) \quad L' = [u_{e-}^{(g,o)} - \mu_{e-} + F(\varphi - \psi)] + 2RT + TF \int_0^T \frac{\sigma}{T} dT$$

ist die stationäre Verdampfungswärme der Elektronen aus Glühkathoden auf meßbare Einzelgrößen zurückgeführt, soweit man wenigstens den Reflexionskoeffizienten $= 0$ setzen kann. Aus (28) ergibt sich unmittelbar, daß das letzte Glied in (25) oder (28) im allgemeinen so klein ist, daß die beiden ersten Glieder eine durchaus hinreichende Näherung darstellen.

Obwohl bei dem heutigen Stande der Meßgenauigkeit durchaus belanglos, sei darauf hingewiesen, daß bei der praktischen Messung von L' die Thomsonwärme auch noch insofern eine Rolle spielt, als die Elektronen vor der Emission noch einen Temperaturanstieg von Zimmertemperatur (T_u) bis zur Emissionstemperatur (T) durchlaufen. Als zuführende Wärmemenge bezogen auf ein Mol ist hier der Betrag $-F \int_{T_u}^T \sigma dT$ einzusetzen.

§ 4. Zur Deutung der Überführungswärmen in Salzen

Wie in § 9 der früheren Arbeit besprochen wurde, lassen sich die Messungen von H. Reinhold¹⁾ an Thermoketten der Kombination Metall-Salz zur näherungsweisen Berechnung des thermoelektrischen Homogeneffektes $(d\varphi/dT)_{\text{stat}}$ im Inneren der Salzphase benutzen. Bei einfachen Salzen gilt ferner die theoretische Beziehung:

$$(27) \quad \left(\frac{d\varphi}{dT} \right)_{\text{stat}} = - \frac{Q_j^*}{T \cdot F},$$

worin Q_j^* die Überführungswärme des einen Bestandteils bedeutet. Das früher noch mitgeschriebene Glied $\partial \Phi / \partial T$ ist hierbei gestrichen [vgl. a. a. O. S. 660, Gl. (26a) und (26b)]. Mit Hilfe vorstehender Gl. (24) lassen sich nunmehr die betreffenden Überführungswärmen ohne weiteres angeben, wobei nur die Abschätzung der partiellen Entropien der Salzphase bei der Berechnung von $(d\varphi/dT)_{\text{stat}}$ eine gewisse Unsicherheit mit sich bringt. Über die Auswertung im einzelnen wird

1) H. Reinhold, Ztschr. f. anorg. Chem. 171. S. 181. 1928.

Herr Reinhold im Zusammenhang mit noch unveröffentlichten Versuchen selbst berichten. Hier sei nur auf folgenden Punkt hingewiesen. Für festes Bleichlorid ergibt sich bei $T = 623$ der thermoelektrische Homogeneffekt zu etwa $-0,72 \cdot 10^{-3}$ Volt/Grad. Daraus würde sich die Überführungswärme des Chlorions zu *minus* 10000 cal/Mol berechnen. Sehr bemerkenswert ist das negative Vorzeichen der Überführungswärme. Zur Erklärung erscheint folgende Vorstellung geeignet. In einem realen Kristallgitter sollen sich auch Störungsstellen in Form geringer Besetzungsdichte, im Extremfall in Form von unbesetzten Gitterplätzen finden, die mit dem Kristallganzen im thermodynamischen Gleichgewicht stehen.¹⁾ Ionenwanderung kann dann derart erfolgen, daß benachbarte Ionen auf einen derartigen Platz rücken und an deren ursprüngliche Stelle ein freier Platz auftritt. Bei diesem Mechanismus wandert der freie Platz somit in umgekehrter Richtung wie die betreffende Ionenart, und da der freie Platz eine Stelle höheren Energieinhalts darstellt, erfolgt auch ein Energiestrom in umgekehrter Richtung wie die Ionenwanderung, d. h. die Überführungswärme ist negativ. Da der relative Energieinhalt einer derartigen Lockerstelle gering im Vergleich mit der gesamten Gitterenergie ist, scheint die Vorstellung einfacher freier Plätze in einem sonst normalen Gitter nicht ohne weiteres anwendbar. In der Umgebung eines freien Gitterplatzes werden aber erhebliche Deformationen vorhanden sein, wodurch die Energiedifferenz stark herabgesetzt sein kann, so daß vielleicht doch der hier skizzierte Mechanismus einer Ionenwanderung als weiterer Ausgangspunkt zu experimentellen und theoretischen Arbeiten dienen kann.

Der Absolutwert der aus thermoelektrischen Daten berechneten Überführungswärme stimmt gut zu dem aus Leitfähigkeitsmessungen abgeleiteten Energieunterschied zwischen Leitungs- und Gitterionen überein²⁾ (etwa 11000 cal/Mol), der nach der früheren Mitteilung (a. a. O. S. 660—662) im wesent-

1) Vgl. W. Schottky in Gemeinschaft mit H. Ulich und C. Wagner, *Thermodynamik*, S. 380. Berlin 1929.

2) Diese Übereinstimmung ist mehr zufälliger Natur; bei anderen Temperaturen sowie bei anderen Salzen finden sich teilweise erhebliche Unterschiede, die noch aufzuklären sind.

lichen mit der Überführungswärme übereinstimmen sollte.¹⁾ Die Untersuchung der genaueren theoretischen Zusammenhänge zwischen Überführungswärme und der Energiedifferenz zwischen Leitungs- und Gitterionen kann in dieser Arbeit noch nicht erfolgen.

Zusammenfassung

1. Der in einer früheren Mitteilung aufgestellte Satz, daß im streng elektroneutralen Zustand der Potentialsprung kondensierter Phasen gegen das Vakuum unabhängig von der Gegenwart kapillaraktiver Stoffe sei, ist zu streichen. Denn die Voraussetzung, daß in einer streng elektroneutralen Phase hinzukommende Ladungen sich im wesentlichen im Phaseninneren verteilen sollen, ist praktisch nur in Sonderfällen erfüllt. Z. B. ist bei spezifischer Ionenadsorption an der Oberfläche damit zu rechnen, daß auch bei streng elektroneutralem Ausgangszustand hinzukommende Ladungen im wesentlichen von der Oberfläche aufgenommen werden (teils von der eigentlichen Adsorptionsschicht, teils von dem diffusen Anteil der Doppelschicht).

2. Die Definition der früher eingeführten Überführungswärmen für elektrisch geladene Bestandteile wird präzisiert. Die bei Ladungsänderungen auftretenden Strukturänderungen der Oberflächenschicht sowie die damit verknüpften Wärmeeffekte werden analysiert. Auf Grund dessen ist das Glied $\partial \Phi / \partial T$ in allen früher erhaltenen Formeln für thermoelektrische Phänomene zu streichen. Die Formeln stimmen dann völlig mit denjenigen von Eastman überein.

3. Es wird eine Formel für die stationäre Verdampfungswärme der Elektronen bei der Emission aus Glühkathoden mitgeteilt. Außer der Austrittsarbeit plus einem Glied $+ 2 R T$ enthält diese Formel nur noch ein Integral über die Thomsonwärme der emittierenden Phase; die beiden ersten Glieder sind für die Größe des Effektes praktisch allein maßgebend.

1) Es sei besonders darauf hingewiesen, daß die Übereinstimmung nur zu erwarten ist, wenn nur der innere Anteil der Überführungswärme berücksichtigt wird, wie er in § 2 der vorliegenden Mitteilung definiert ist.

4. Es wird auf die Konsequenzen des Wegfalls des Gliedes $\partial \Phi / \partial T$ für die Auswertung von Messungen an Thermo-ketten Metall-Salz hingewiesen. Die Überführungswärmen in der Salzphase können nunmehr unmittelbar abgeschätzt werden. Die Überführungswärme der Chlorionen (beweglicher Bestandteil) im festen Bleichlorid kommt negativ heraus. Aus dem negativen Vorzeichen der Überführungswärme wird auf einen besonderen Mechanismus der Chlorionenbeweglichkeit geschlossen; deren Wanderung soll über freie Gitterplätze oder ähnliche Störungsstellen erfolgen, die bei der Wanderung der Chlorionen sich in entgegengesetzter Richtung wie diese verschieben.

Jena, Physikalisch-Chemische Abteilung des Chemischen Laboratoriums der Universität.

(Eingegangen 21. Juni 1930)

***Über die Beeinflussung der Kathodenstrahlreflexion
an Aluminium und Platin durch Belichtung und
die Realität der dabei auftretenden positiven und
negativen Zusatzströme***

Von Walter Kohl

(Mit 11 Figuren)

A. Einleitung

Die Analogie zwischen der Sekundäremission der Elektronen und der lichtelektrischen Emission (Temperaturunabhängigkeit, Einfluß der Gasbeladung, geringe Anfangsgeschwindigkeiten) sowie die Notwendigkeit, bei beiden Vorgängen Zwischenmechanismen anzunehmen, die die eingestrahlte Energie an das zu emittierende Elektron übertragen, führte 1925 H. Dember¹⁾ zu Versuchen, diesen Zwischenmechanismus und damit die Emission selbst zu beeinflussen.

Nimmt man an, daß durch die Bestrahlung eines Metalles mit Kathodenstrahlen bestimmter Geschwindigkeit in diesem Atomelektronen angeregt und durch den Zwischenmechanismus zur Emission gebracht werden, wenn die ihnen übermittelte Energie groß genug ist, um die innere Abtrennungsarbeit und die Austrittsarbeit zu leisten, so ist es denkbar, daß angeregte Elektronen, deren Energie zur Emission nicht ausreicht, durch Belichtung doch noch ausgelöst werden und als Zusatzstrom in Erscheinung treten. Die Versuche schienen diese Überlegungen zu bestätigen.

Im Inneren einer versilberten Kugelzelle befand sich eine Aluminiumplatte, die einerseits mit Glühelktronen von 98 Volt Geschwindigkeit bestrahlt und andererseits durch ein direkt vor der Platte befindliches Netz hindurch belichtet werden konnte. Dabei zeigte sich bei gleichzeitiger Bestrahlung und Belichtung

1) H. Dember, Ztschr. f. Phys. 33. S. 529. 1925.

ein positiver Zusatzstrom, der den reinen lichtelektrischen Strom im günstigsten Fall um das 148 fache übertraf. Es sei schon hier bemerkt, daß die Ansicht über die der Erscheinung zugrunde liegenden Vorgänge später geändert wurde. Die von verschiedenen Seiten zur Klärung unternommenen Versuche haben sich aber als recht fruchtbar erwiesen.

Frey¹⁾ versuchte zunächst, die Demberschen Messungen zu wiederholen und kam dabei zu dem Ergebnis, daß nur im Geschwindigkeitsbereich von 0—30 Volt der Primärelektronen eine Vergrößerung des Summenstromes auftrat. Sie nahm mit dem Anwachsen des Primärstromes zu und stellte sich trägeheitslos ein. Bei Geschwindigkeiten über 30 Volt verschwand die Erscheinung. Dies ließ nach Frey darauf schließen, daß die Vermehrung des Summenstromes durch eine Raumladungszerstörung durch positive Ionen zustande kam, die durch Belichtung erzeugt wurden. An einer zweiten Röhre, die es erlaubte, den Sekundärstrom im feldfreien Raum zu messen, wurde ein negativer Zusatzstrom bei Belichtung gefunden, der von Frey Beleuchtungseffekt genannt und durch Verminderung der Sekundäremission der Platte erklärt wurde. Der Effekt trat an technischem Al erst auf, nachdem die Platte einen Monat im Vakuum gestanden hatte und vor dem Messen mehrere Tage mit 440-Volt-Elektronen bombardiert worden war. Dieser negative Zusatzstrom beträgt im günstigsten Fall 15 Proz. der Sekundäremission. Sein Auftreten ist im Bereich für eine Anodenspannung von 30—200 Volt an die Gegenwart von Elektronen mit Geschwindigkeiten unter 10 Volt gebunden. Wird der Zylinder, der in der Freyschen Versuchszelle den Meßraum einschließt, auf 10 Volt positiv geladen, so tritt der Beleuchtungseffekt nicht ein. Frey deutet dies so, daß Sekundärelektronen, die am Zylinder ausgelöst werden, als wirksame Elektronen auf die Platte auftreffen und den Effekt erzeugen. In dem Druckintervall von $p = 10^{-3}$ — 10^{-6} mm Hg erweist sich der aufgefundene Effekt als vom Druck unabhängig.

Die Messungen von Frey waren unternommen worden ohne Kenntnis der Arbeit von Rudberg²⁾, der etwa zur selben

1) E. Frey, Helvet. Phys. I. S. 385. 1928.

2) E. Rudberg, Medd. f. Nobelinst. 6. Heft 12. 1925.

Zeit wie Dember ähnliche Versuche an Platin angestellt hat und wie Frey eine Erniedrigung der Sekundäremission bei Belichtung findet. Von der Primärgeschwindigkeit der einstrahlenden Elektronen zeigte sich keine große Abhängigkeit. Die Versuche wurden wie bei Frey im höchsten Vakuum nach sorgfältiger Entgasung der Zelle durchgeführt. Wenn die Pt-Folie selbst entgast wird, verschwindet der Effekt, nach Gasbeladung zeigt er sich wieder, ist aber dann instabiler als vor der Entgasung. Die Tatsache, daß der Effekt auch bei Belichtung der Rückseite der Folie beobachtet wird, obwohl eine Wirkung des Lichtes durch die Folie hindurch ausgeschlossen ist (0,01 mm), läßt auf eine thermische Wirkung schließen. Der Effekt zeigt wie bei Frey eine Akkommodationszeit (1 Min.). Auch Frey hat für seinen Beleuchtungseffekt eine thermische Deutung in Betracht gezogen.

J. Langmuir¹⁾ erhielt bei der Belichtung von mit Cäsiumdampf beschlagenen Nickelzylindern eine Erhöhung der Sekundäremission. Von Farnsworth²⁾ wurde bei Überlagerung von Photostrom und Sekundäremission die genaue Summe der Einzeleffekte gemessen. Dabei betrug der Photostrom allerdings nur 1—2 Proz. des Sekundärstromes. Bodemann³⁾ zeigte bei der Belichtung einer Oxydkathode, daß Zusatzströme auftreten solange die Kathode nicht entgast ist, und konnte nachweisen, daß sie durch die Raumladung von an Gasschichten absorbierten Elektronen hervorgerufen sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, festzustellen, welche Faktoren für das Auftreten der Demberschen Zusatzströme ausschlaggebend sind und nach Möglichkeit einen Anschluß an die obengenannten Arbeiten zu gewinnen.

B. Versuchsanordnung

Ein Bild der Versuchsanordnung sowie der elektrischen Schaltung zeigt Fig. 1. Die Versuchszelle, die für die Messungen an Al zunächst verwendet wurde, unterscheidet sich von

1) J. Langmuir, *Science* **58**. S. 398. 1923.

2) E. Farnsworth, *Phys. Rev.* **25**. S. 41. 1925.

3) E. Bodemann, *Ann. d. Phys.* [5] **3**. S. 614. 1929.

W = Wasserstrahlpumpe
 V = Volmerpumpe
 D = Diffusionspumpe
 R = Rezipient

M = MeLeod
 A = Ausfrierflasche
 H = Hähne

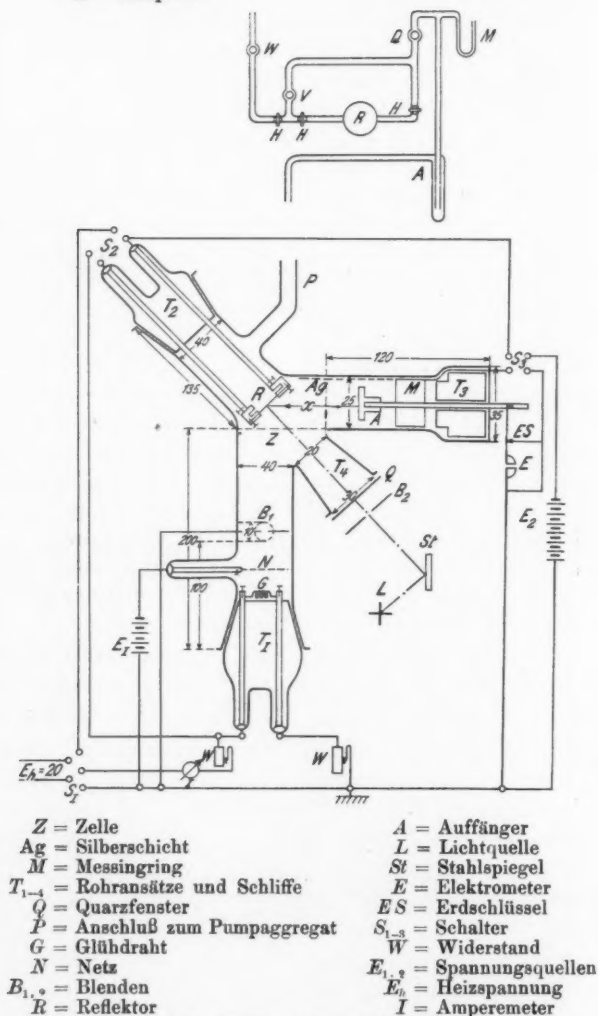


Fig. 1. Versuchsanordnung

der abgebildeten nur dadurch, daß sich an Stelle des Schliffes mit den Stromdurchführungen für die Folie ein Ansatz wie bei T_3 mit einem eingekitteten Bernsteinstopfen befand und eine Al-Platte trug wie sie auch später noch als Auffänger diente. Die zu besprechenden Messungen an Pt wurden an der gezeichneten Zelle ausgeführt.

Die Zelle besteht aus vier Rohransätzen $T_1 - T_4$. T_1 enthält die Vorrichtungen zur Erzeugung eines Elektronenstrahlbündels bestimmter Geschwindigkeit, T_2 den Reflektor R , T_3 den Auffänger A und T_4 bildet den Lichtweg.

Die Schliffe T_1 und T_2 wurden mit zähem Ramsayfett eingesetzt, das Quarzfenster Q war mit weißem Siegelack auf T_4 aufgekittet, der Auffänger A bestand aus einer Aluminiumscheibe, die auf einen Messingstab geschraubt war. Dieser Stab wurde durch einen Bernsteinstopfen gehalten, der seinerseits in den Tubus T_3 mit weißem Siegelack eingekittet war. Die Zelle war versilbert, ein an der Glaswand bei M federnd anliegender Messingring bildete den Kontakt mit der Silberschicht Ag und stand durch einen in der Kittung liegenden Cu-Draht mit dem Schalter S_3 in Verbindung. Die Platinfolie R im Tubus T_2 war zwischen zwei Messinghalter geklemmt, die ihrerseits auswechselbar in zwei Rundstäben aus Messing befestigt waren. Nach Beseitigung der Klemmvorrichtung konnte eine Aluminiumscheibe auf den Haltern angebracht werden.

Die Glühelatronen verlassen beschleunigt den Glühdraht, gelangen durch ein weitmaschiges, geerdetes Netz N aus Messingdraht und durch eine geerdete Aluminiumblende B_1 auf die Folie R , werden hier reflektiert, bei A aufgefangen und am Elektrometer E gemessen. Netz N und Blende B_1 sind kreisförmig, füllen die lichte Weite des Rohres und haben ein Loch von 8 mm Durchmesser.

Das gesamte Versuchsrohr und die Elektrometerzuleitungen sind zum elektrostatischen Schutz von einem geerdeten Blechgehäuse umgeben.

Die Belichtung der Folie R erfolgte durch eine Quarzquecksilberlampe L von Heraeus, die bei einer Klemmenspannung von etwa 65 Volt und einer Stromstärke von 2 Amp. einbrannte.

Das Licht wurde nach Bedarf durch verschiedene Blenden B_2 geschickt, aus Gründen der räumlichen Anordnung an einem Stahlspiegel St reflektiert und durch eine Quarzlinse auf die Folie gerichtet.

Zur Erzeugung der Glühelektronen diente ein Wolframdraht ($\varnothing = 200 \mu$), der auf einem Cu-Draht von 2 mm Querschnitt zu einer Spirale von mehreren Windungen aufgewickelt worden war und nach kurzzeitiger Überlastung und einhalbstündigem Einbrennen konstante Emission lieferte. Gelegentlich wurden auch Oxydkathoden verwendet, die durch Bestreichen der Drähte mit einer Paste aus Barium- und Calciumnitrat und Aktivieren im Vakuum erhalten wurden. Sie haben den Vorteil, daß man sie nicht so stark zu heizen braucht, um eine genügende Emission zu erreichen. War starkes Heizen der gewöhnlichen W -Drähte erforderlich, so wurde der dicht hinter dem Glühdraht sitzende Schliff mit einem Gebläse gekühlt, um eine Erwärmung des Fettes zu verhindern. Nach längerem Gebrauch im Vakuum war auch bei nicht aktivierten W -Drähten kein Überlasten mehr nötig, um eine gute Emission zu erhalten.

Die Versuche wurden im Hochvakuum ausgeführt. Zu dessen Erzeugung dienten eine Wasserstrahlpumpe, eine Volmer- und eine Diffusionspumpe (vgl. Fig. 1). Quecksilberdämpfe wurden von der Zelle durch eine mit flüssiger Luft umgebene Ausfrieretasche ferngehalten. Der Druck konnte mit einem McLeod gemessen werden und war stets kleiner als 10^{-5} mm Hg.

Die Aufladungen der Platte A wurden an einem Elektrometer E nach Dolezalek gemessen. Die Hilfsspannung der Nadel betrug 100 Volt, die Empfindlichkeit des Instrumentes 3500 Skt./Volt bei einem Skalenabstand von 2,50 m. Eine direkte elektrometrische Messung des zu untersuchenden Effektes am Reflektor selbst war deswegen nicht möglich, weil sich vor der Folie naturgemäß eine Raumladung ausbildet, die auf die nachfolgenden Elektronen abbremsend wirkt. Kommt durch Belichtung der Folie eine positive Aufladung zustande, so wird diese sofort aus der Raumladung und den nachfolgenden Elektronen neutralisiert, ohne daß man den Einfluß der Belichtung messen könnte.

C. Versuchsausführung

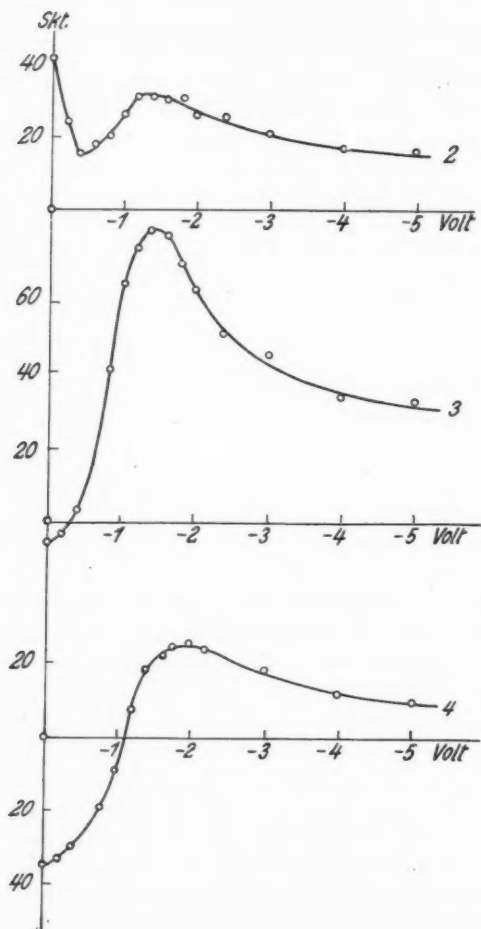
Nachdem ein genügend hohes Vakuum erzeugt war, wurde die lichtelektrische Empfindlichkeit der Folie, soweit sie nicht an sich schon zum Messen ausreichte, durch Entfernen der Oberflächengase mittels schwachen, kurzzeitigen Glühens gesteigert. Die bei R anstatt Platin zunächst benutzte Aluminiumplatte wurde frisch geschmirgelt und poliert in die Zelle eingesetzt und behielt für einige Tage eine genügende Empfindlichkeit. Bei der Verwendung von dünnen Aluminiumfolien ist das Entgasen durch Glühen bekanntlich eine besondere Schwierigkeit, da die Folien meist durchbrennen. Es gelang, dies dadurch zu verhindern, daß Folie und Glühspirale in einem Stromkreis parallel geschaltet wurden. Die Folie erhöht kurz vor dem Durchbrennen ihren Widerstand beträchtlich, so daß der Glühdraht, der bis dahin schwach glüht, plötzlich stark aufleuchtet. Schaltet man in diesem Augenblick den Strom aus, so bleibt die Folie erhalten.

Nach der Aktivierung der Kathode wurde durch Regulieren des Heizstromes und Einstellen entsprechender Blenden in den Strahlengang des Lichtes dafür gesorgt, daß die Ausschläge am Elektrometer für den Sekundärstrom und den lichtelektrischen Strom von derselben Größenordnung waren, damit bei ihrer Überlagerung die Skala des Fernrohres zu ihrer Beobachtung ausreichte. Es wurde nach der Auflademethode gemessen.

Ergab so die reflektierte Elektronenstrahlung einen Ausschlag Gl , der reine lichtelektrische Strom den Ausschlag L und die gleichzeitige Bestrahlung und Belichtung den Summenschlag S , so war $S = (Gl + L)$ der Zusatzstrom Z oder Δ .¹⁾ Um bei der Messung von L die Glühelektronen zurückzuhalten, wurde der Glühdraht während dieser Messung auf ein positives Potential aufgeladen (10—20 Volt).

In dieser Weise wurden Messungen angestellt zunächst an einer Al-Platte aus Vakuummetall, die zunächst den Platz der

1) Es wird hier die Bezeichnung Z für den positiven und Δ für den negativen Zusatzstrom eingeführt bzw. von Frey übernommen.



Zusatzströme an Pt in Abhängigkeit vom negativen Potential der Folie bei zunehmender Entgasung

Figg. 2-4

Folie einnahm, dann an einer solchen aus technischem auf Hochglanz poliertem Al und schließlich an einer Al-Folie von 0,01 mm Stärke. Diese Versuche wurden lange Zeit für ver-

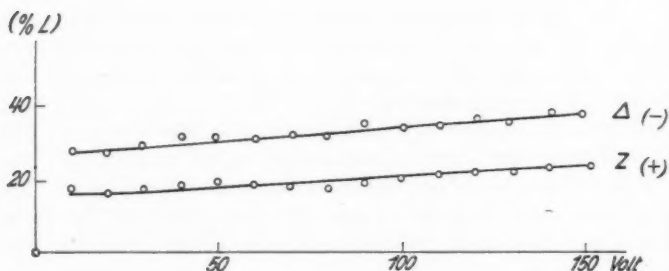
schiedene Aufladungen der Folie durchgeführt und ergaben bald positive, bald negative Zusatzströme oder die reine Summe der Einzeleffekte, ohne daß sich ein Gang irgendwelcher Art in den Zahlen zu erkennen gab oder das Vorzeichen des Zusatzstromes im voraus zu bestimmen war. Dabei wurde der Z-Effekt bis zu 50 Proz. und der Δ -Effekt in einzelnen Fällen über 100 Proz. des reinen lichtelektrischen Stromes gefunden. Nach langen, zeitraubenden Messungen wurden dann Versuche an Platin unternommen, die bestimmte Ergebnisse lieferten.

An der gasbeladenen, geerdeten Pt-Folie zeigte sich regelmäßig ein positiver Zusatzstrom, der mit der Entgasung sein Vorzeichen umkehrte und zu einem Δ -Effekt wurde, der mit weiterer Entgasung anstieg. Wurde der Reflektor negativ aufgeladen, so ergaben sich charakteristische Kurven, wenn der Zusatzstrom über dem Folienpotential aufgetragen wurde. Die Kurven zeigen ein ausgeprägtes Maximum zwischen 1 und 2 Volt und sind ihrer Form und Lage nach vom Gasgehalt der Folie abhängig. Bei stark gasbeladener Folie tritt ein Minimum bei 0,4 Volt dazu (vgl. Fig. 2). Fig. 3 zeigt die entsprechende Kurve, an derselben Folie gemessen, nach einhalbstündiger intermittierender Entgasung. Die Folie glühte aller 27 Sek. 3 Sek. lang bei Rotglut und einem Heizstrom von 2,9 Amp. Fig. 4 zeigt dieselbe charakteristische Kurve nach anschließender intermittierender Entgasung während 20 Std. bei Gelbglut (Heizstrom = 3,2 Amp.). Alle drei Kurven sind bei einer Primärgeschwindigkeit des Elektronenstromes aus G von 60 Volt aufgenommen.

Diese Art von Kurven wurden für verschiedene Primärgeschwindigkeiten in großer Zahl gemessen. Sowohl der Z- als auch der Δ -Effekt zeigten bei konstantem Folienpotential in Abhängigkeit von der Primärgeschwindigkeit der einstrahlenden Elektronen im Bereich von 0—150 Volt ein geringes Ansteigen (vgl. Fig. 5).

Die an der gasbeladenen und geerdeten Folie gemessenen positiven Zusatzströme (also die positive Ordinate des Ausgangspunktes der Kurve Fig. 2) konnten gedeutet werden als hervorgerufen durch Glühelektronen, die von einem dem Metall anhaftenden Gasbelag absorbiert und dann bei Belichtung

zusätzlich frei werden, wie das der Auffassung von Bodemann entspricht. Die scheinbar so einfach mögliche Umwandlung des an der oberflächlich entgaste Folie auftretenden Δ -Effektes in einen Z -Effekt durch negative Aufladung der Folie hätte umständlichere Vorstellungen zur Deutung erfordert, wenn nicht rechtzeitig erkannt worden wäre, daß inhomogene Feldverhältnisse dafür die Ursache bildeten. Bei den bisher besprochenen Messungen war die Silberschicht der Zelle stets geerdet. Das bedingt aber, daß bei negativen Potentialen der Folie ein Feld-



Abhängigkeit der Zusatzströme von der Primärgeschwindigkeit
der einstrahlenden Elektronen

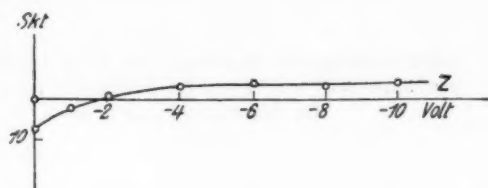
Konstantes Potential der Folie $f \cdot \Delta$: Null, $f \cdot Z$: -1 Volt

Fig. 5

Tabelle 1

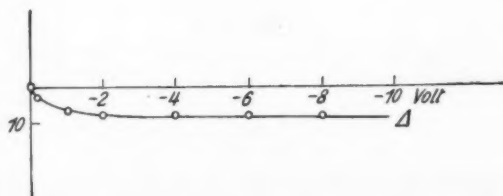
Zahlenwerte zu Fig. 3

P (Fol.) Volt	Gl Skt.	L Skt.	$Gl + L$ Skt.	Z Skt.	Z % L
0	58	59	117	- 4	- 6,8
-0,2	61	102	163	- 4	- 3,9
-0,4	63	144	207	+ 3	+ 2,1
-0,8	66	230	296	+ 96	+41,8
-1,2	65	247	312	+181	+73,2
-1,6	63	236	299	+186	+78,7
-2,0	60	217	277	+138	+63,6
-3,0	55	199	254	+ 91	+46,0
-4,0	52	197	249	+ 68	+34,6
-5,0	50	181	231	+ 60	+33,2



Zusatzstrom an einer mit Wolfram bestäubten Pt-Folie
in Abhängigkeit vom negativen Folienpotential ($x = 43$ mm)

Fig. 6



Zusatzstrom Z im gestörten und Δ im ungestörten Feld
($x = 43$ mm)

Fig. 7a, b

linienverlauf von der Wand der Zelle nach der Folie hin besteht, und dadurch von den Elektronen, die am Reflektor R reflektiert werden, nur noch ein Teil unmittelbar zum Auffänger gelangt. Ein anderer Teil wird an die Zellwand gezogen und

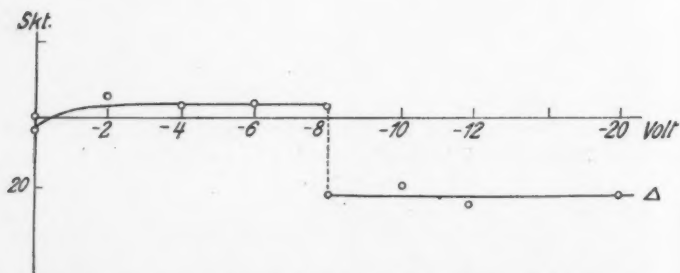
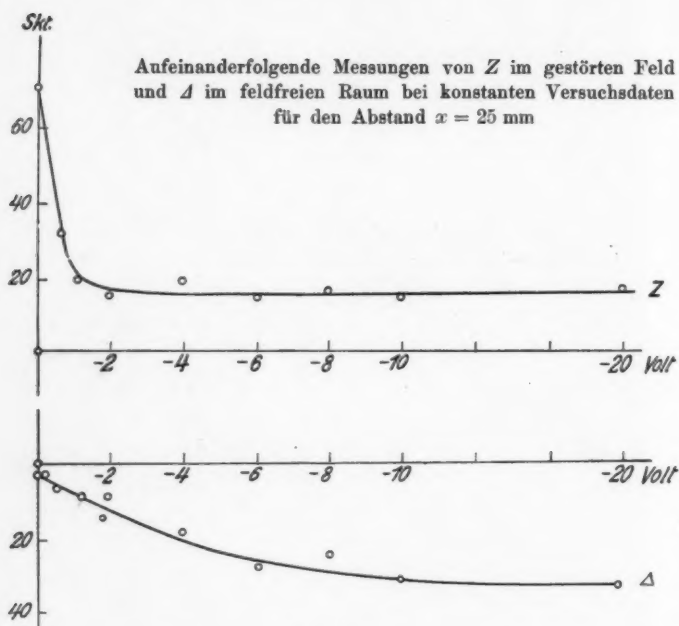
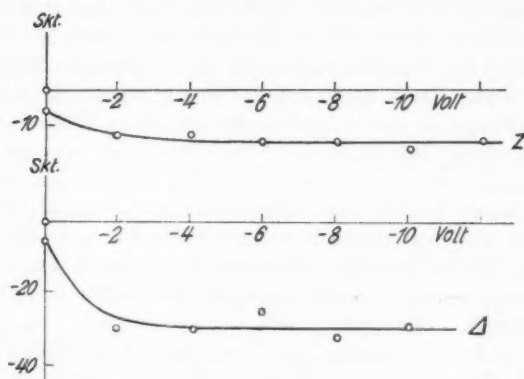
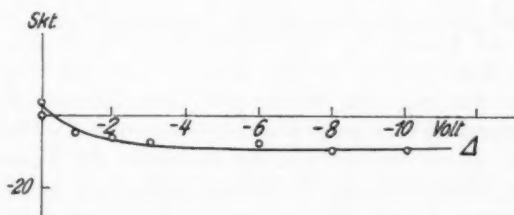


Fig. 9



Aufeinanderfolgende Messungen von Z im gestörten Feld
und Δ im feldfreien Raum bei konstanten Versuchsdaten
($x = 36 \text{ mm}$)

Fig. 10



Messung des Δ -Effektes im feldfreien Raum ($x = 48 \text{ mm}$)
an einer polierten Platte aus technischem Aluminium

Fig. 11

dort Sekundärelektronen erzeugen, die wohl für das Maximum der Kurven 2—4 und ihren gesamten Verlauf oberhalb der Abszissenachse verantwortlich sind. Das geht vor allem daraus hervor, daß schon die lichtelektrische Emission der Folie in Abhängigkeit von deren negativem Potential über ein Maximum geht (vgl. dazu Tab. 1).

An einer mit Wolfram bestäubten Folie wurde nach der alten Methode mit geerdeter Silberschicht gemessen, um nach einer längeren Pause den Anschluß an die früheren Messungen herzustellen. Dabei ergab sich die in Fig. 6 gezeichnete Kurve. Der Auffänger A war versuchsweise mit einem Käfig versehen. Nach weiteren Messungen an reinen Pt-Folien mit und ohne Käfig zeigte sich, daß dieser ohne jeden Einfluß war, er blieb infolgedessen künftig weg. Dagegen wurde erkannt, daß der Abstand des Auffängers von der Folie für die Form der Kurven, die bei geerdeter Silberschicht gemessen wurden, von Bedeutung ist. Es wird deswegen die Größe x eingeführt (vgl. Fig. 1). So ergaben sich bei $x = 43$ mm die Kurven Fig. 7 (a, b). Sie wurden bei einer Primärgeschwindigkeit von 60 Volt ohne vorherige Entgasung der Folie gemessen. Entgasung zeigte keinen merklichen Einfluß auf die Kurvenform, sondern nur auf den Anfangspunkt der Kurven. Die weiterhin mit Z bezeichneten Kurven sind bei geerdeter Silberschicht gemessen; bei denen mit der Bezeichnung A ist die Silberschicht mit der Folie verbunden, so daß ein annähernd feldfreier Raum in der Nähe der Folie besteht.

Nach einer Annäherung der Auffangplatte an die Folie wurden die Kurven Fig. 8 (a, b) gemessen ($x = 25$ mm). Dabei war die Folie jeweils vor dem Messen 3 mal auf Rotglut geglüht worden, um eine hinreichende lichtelektrische Emission zu erlangen. Fig. 9 zeigt den Übergang vom Z -Effekt zum A -Effekt durch Veränderung des Potentials der Silberschicht in einer Meßreihe nach 10 Minuten Entgasung bei Gelbglut ($x = 36$ mm); Fig. 10 für denselben Abstand zwei aufeinanderfolgende Messungen von Z und A ohne Veränderung der Versuchsdaten. In Fig. 11 ist die A -Kurve an einer Al-Platte für den Abstand $x = 48$ mm gezeichnet. Sie zeigt denselben Verlauf wie die bisherigen Kurven an Pt.

Während bei den im ersten Meßabschnitt gezeichneten Kurven (Figg. 2–4) die Zusatzströme in Prozent des reinen lichtelektrischen Stromes aufgetragen sind, um die Kurven miteinander vergleichen zu können, wurde davon im zweiten Meßabschnitt abgesehen, weil bei den anfangs kleinen lichtelektrischen Strömen unverhältnismäßig große Zusatzströme vorgetauscht werden, wenn man nicht die Zahlenwerte gleichzeitig

mit den Kurvenbildern vor sich hat. Es werden also von Fig. 6 an nur Absolutwerte und keine Relativwerte aufgetragen. Tab. 2 gibt die Daten für die Kurven Fig. 8, die ohne Ver-

Tabelle 2

<i>P</i> (Fol.) Volt	<i>GI</i> Skt.	<i>L</i> Skt.	<i>GI + L</i> Skt.	<i>Z</i> Skt.	<i>GI</i> Skt.	<i>L</i> Skt.	<i>GI + L</i> Skt.	<i>A</i> Skt.
0	253	43	296	+72	76	23	99	- 3
- 0,2	344	17	351	+55	87	37	124	- 3
- 0,6	357	0	357	+33	132	50	182	- 7
- 1,2	355	0	355	+20	155	62	217	- 9
- 2,0	317	0	317	+16	169	72	241	- 9
- 4,0	250	0	250	+21	206	84	290	-19
- 6,0	242	0	242	+15	204	97	301	-29
- 8,0	212	0	212	+16	169	110	279	-25
-10,0	198	0	198	+15	144	116	285	-32
-20,0	180	0	180	+17	118	156	274	-37

änderung der äußeren Versuchsbedingungen hintereinander gemessen wurden und also auch vergleichbar sind.

Es sei zum Schluß noch angeführt, daß auch die ersten Messungen an Aluminium, die als nicht verwertbar zunächst

Tabelle 3

<i>P</i> (Netz) Volt	<i>P</i> (Al) Volt	<i>P</i> (Ag) Volt	<i>GI</i> Skt.	<i>L</i> Skt.	<i>GI + L</i> Skt.	<i>A</i> Skt.	Dat.
180	0	0	49	55	104	- 18	3. 7.
180	0	0	55	103	158	- 20	3. 7.
180	0	0	50	116	166	- 16	3. 7.
180	-60	0	74	20	94	- 3	8. 7.
180	-60	0	39	40	79	- 4	8. 7.
0	0	0	138	108	246	-104	12. 9.
0	0	0	215	80	295	-100	13. 9.
2	- 2	0	25	32	57	- 4	13. 9.
60	0	0	445	95	540	- 35	13. 9.
100	0	0	511	75	586	- 32	13. 9.

aufgegeben waren, nach Kenntnis der äußeren Bedingungen, die zu den verschiedenen Zusatzströmen führen, sich in das oben entworfene Bild mit einfügen. Dies wird deutlich an

Tab. 3, wo verschiedene Messungen des Δ -Effektes in zeitlicher Folge aufgeführt sind. Die Zahlen für Δ werden dann klein, wenn die Silberschicht und die Al-Platte nicht dasselbe Potential haben, d. h. wenn gestörte Feldverhältnisse vorliegen.

Als Ergebnis der beschriebenen Versuche läßt sich feststellen, daß an einer auch nur oberflächlich entgasten Folie bei homogenen Feldverhältnissen ein positiver Zusatzstrom nicht meßbar ist. Er tritt im feldfreien Raum an der gasbeladenen Folie auf, an der entgasten Folie nur bei gestörtem Feld. An der gasbeladenen Folie kann der Zusatzstrom durch die Raumladungswirkung absorbiert Glühelatronen gedeutet werden, wie das auch in der Arbeit von E. Bodemann¹⁾ geschehen ist, wo der Zusatzstrom an einer belichteten Oxydfolie gemessen wird. Es muß im einzelnen dahingestellt bleiben, ob ein Vergleich der hier angestellten Versuche mit denen von Bodemann zulässig ist, da hier der Reflektor und dort die emittierende Oxydfolie belichtet wurde.

Der bei gestörtem Feld auftretende Zusatzstrom ist wahrscheinlich durch Sekundärelektronen bedingt, die an der Zellwand ausgelöst werden. Daß er nicht mehr auftritt, wenn der Auffänger weiter von der Folie entfernt ist, läßt sich erklären dadurch, daß die Sekundärelektronen nach mehrfacher Reflexion an der Zellwand absorbiert sind, ehe sie den Auffänger erreichen.

Auch der Δ -Effekt wird von Frey bekanntlich auf Sekundärelektronen, und zwar solche von 10 Volt Geschwindigkeit, zurückgeführt, die an der Wand des von ihm gebrauchten Ni-Zylinders ausgelöst werden, der den Meßraum im Freyschen Versuchsrohr umgibt. Durch eine positive Aufladung mit 10 Volt verschwand dort der Δ -Effekt. Bei den geometrischen Abmessungen der hier verwendeten Zelle ließ sich dies nicht nachprüfen, da bei positiver Aufladung der Zellwand die gesamte Reflektorstrahlung nach der Wand abgelenkt wurde.

1) E. Bodemann, Ann. d. Phys. [5] 3. S. 614. 1929.

Der Δ -Effekt zeigte sich stets an der oberflächlich entgaste Folie im feldfreien Raum und ist vom Gasgehalt der Folie abhängig. Eine Wiederholung der von Frey angestellten quantitativen Messungen war mit der verwendeten Zelle nicht möglich, sie erlaubte nur eine qualitative Bestätigung des Δ -Effektes. Von anderer Seite sind im hiesigen Institut an einer dem Freyschen Versuchsrohr nachgebildeten Zelle Untersuchungen im Gange. Daß Frey an der Demberschen Zelle die von Dember gemessenen Zusatzströme nicht gefunden hat, dürfte darauf zurückzuführen sein, daß er das Netz und nicht wie Dember die Silberschicht der Zelle als Kathode verwendete. Gerade durch das vielleicht nicht eindeutig geerdete Netz sind bei den Demberschen Versuchen wahrscheinlich die Feldstörungen entstanden, die den Z -Effekt hervorrufen.

D. Zusammenfassung

An Platin und Aluminium wird der Einfluß der Belichtung auf die Reflexion von Kathodenstrahlen untersucht. Es können dabei, je nach den Versuchsbedingungen in der Zelle, Zusatzströme auftreten von zweierlei Art. Entweder ist die Summenstrahlung größer oder sie ist kleiner als die Summe der Einzelkomponenten, nämlich der glühelektrischen und der lichtelektrischen. Beide Fälle sind in der Literatur bekannt. Es konnte gezeigt werden, daß in der Tat die von Frey gemessene Verkleinerung des Summenstromes bei gleichzeitiger Bestrahlung der Folie mit Elektronen und Belichtung der Folie mit ultravioletter Licht im homogenen Feld eintritt und daß sie von der Geschwindigkeit der Primärelektronen nur wenig, dagegen vom Gasgehalt der Folie stark abhängt.

Bei gasbeladenen Folien können im homogenen Feld positive Zusatzströme auftreten, die durch die Verminderung der Raumladungswirkung der vom anhaftenden Gas absorbierten Elektronen infolge Belichtung erklärt werden. Diese Zusatzströme erreichen bei den hier gegebenen Versuchsbedingungen kaum 50 Proz. des lichtelektrischen Stromes. Größere Zusatz-

ströme, die den lichtelektrischen Strom um das Mehrfache übertreffen, können an gasfreien Folien auftreten, wenn Feldstörungen vorliegen.

Ich möchte zum Schluß Herrn Professor Dember für die Problemstellung der Arbeit und das fördernde Interesse, das er ihr stets hat zuteil werden lassen, herzlich danken.

Dresden, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, April 1930.

(Eingegangen 21. Juni 1930)

sw.

che
ld-

die
das

ch-